10.3.3 Výpočet neurčitých integrálů II

Předpoklady: 10302

Integrační proměnná se do integrálu nepíše pro nic za nic. Funkce může obsahovat proměnných více a na tom, kterou zvolíme jako tu integrační (která se mění), závisí výsledek.

Například:

$$\int (a+x)\,dx = \int a\,dx + \int x\,dx = a\int 1 dx + \int x\,dx = ax + \frac{x^2}{2} + C$$

(při integrování podle dx hraje a stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

$$\int (a+x)\,da = \int a\,da + \int x\,da = \int a\,da + x\int 1 da = \frac{a^2}{2} + xa + C$$

(při integrování podle da hraje x stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

Př. 1: Vypočti:
a) $\int (at^2 + e^x)\,dx$ b) $\int (at^2 + e^x)\,dt$ c) $\int (at^2 + e^x)\,da$

a) $\int (at^2 + e^x)\,dx = \int at^2 dx + \int e^x dx = at^2 x + e^x + C$

b) $\int (at^2 + e^x)\,dt = \int at^2 dt + \int e^x dt = a\frac{t^3}{3} + te^x + C$

c) $\int (at^2 + e^x)\,da = \int at^2 da + \int e^x da = \frac{a^2}{2}t^2 + ae^x + C$

Pedagogická poznámka: U předchozí příkladu kontrolujeme výsledek po bodě a), zbývající body kontrolujeme najednou. Největší problémy v druhých dvou bodech studentům dělá integrace členu e^x.

Př. 2: Sestav tabulku pro integrování goniometrických funkcí.

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}\, x + C$

Pedagogická poznámka: Je třeba se studenty prodiskutovat fakt, že tabulka nám nedává žádný návod jak integrovat funkce $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\, x$, protože nemáme žádnou funkci, která by se zderivovala na $\mathrm{tg}\, x$.

Př. 3: Vypočti:

a) $\int\left(\cos x+2+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx$ b) $\int\left(a\sin x-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{\sin a}{\sqrt{x}}\right)dx$

a) $\int\left(\cos x+2+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx=\int\cos x\,dx+\int 2\,dx+\int\frac{1}{2\sin^2 x}\,dx=\sin x+2x-\frac{\operatorname{cotg} x}{2}+C$

b)

$\int\left(a\sin x-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{\sin a}{\sqrt{x}}\right)dx=\int a\sin x\,dx-\int\frac{2}{\sin^2 x}\,dx+\sin a\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=$

$=-a\cos x-\left(-2\operatorname{cotg} x\right)+\sin a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-a\cos x+2\operatorname{cotg} x+2\sin a\sqrt{x}+C$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x}dx$ b) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$ c) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$

a) $\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x}dx=\int\cos x\,dx=\sin x+C$

b) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C$

výsledek vypadá dost neuvěřitelně $\Rightarrow$ zkusíme si ho zderivovat:

$\left(\operatorname{tg} x-x+C\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x^2$

c) $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=\int 2\sin x\,dx=-2\cos x+C$

Př. 5: Najdi k funkci $y=3x^2-2x+1$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[1;3]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu $\Rightarrow$ vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$\int\left(3x^2-2x+1\right)dx=3\int x^2dx-2\int x\,dx+\int dx=3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C=x^3-x^2+x+C$

Funkce má procházet bodem $[1;3]$: $3=1^3-1^2+1+C\ \Rightarrow\ C=2$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y=x^3-x^2+x+2$

Př. 6: Najdi k funkci $y=\cos x-2$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $\left[\frac{\pi}{2};-1\right]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu $\Rightarrow$ vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$\int\left(\cos x-2\right)dx=\int\cos dx-2\int dx=\sin x-2x+C$

Funkce má procházet bodem $\left[\frac{\pi}{2};-1\right]$: $-1=\sin\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}+C$

$-1=1-\pi+C \quad \Rightarrow \quad C=\pi-2$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y=\sin x-2x+\pi-2$

Př. 7: Petáková:
strana 164/cvičení 86 a) c) f) h) i) k)

Shrnutí: Integrační proměnná nám říká, která z neznámých se mění a tím určuje jakým způsobem vypočteme integrál. Integrály ze stejných výrazů podle různých proměnných se mohou zcela lišit.