10.3.2 Výpočet neurčitých integrálů I

Předpoklady: 10301

V minulé hodině jsme začali hledat primitivní funkce. Například k funkci $f(x)=2x$ je primitivní funkcí funkce $F(x)=x^2+C$, protože platí $F'(x)=f(x)$ konkrétně $\left(x^2+C\right)'=2x$. Hledání primitivních funkcí nám usnadňovaly vzorce sestavené podle pravidel pro derivace:

derivace	$(C)'=0$	$(x)'=1$	$\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}$
integrace	$\int 0\,dx=C$	$\int 1\,dx=\int dx=x+C$	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\neq -1$, $x\in(0;\infty)$

a vzorec pro integrování součtu: $\int\left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\right]dx=c_1\int f_1(x)\,dx+c_2\int f_2(x)\,dx$

Př. 1: Vypočti:

a) $\int\left(\frac{x^3}{6}-2x^2+\pi\right)dx$ b) $\int\left[(x+2)\left(x^2-1\right)\right]dx$ c) $\int\frac{x^5-3x+\sqrt{2}}{x^3}\,dx$

a) $\int\left(\frac{x^3}{6}-2x^2+\pi\right)dx=\int\frac{x^3}{6}\,dx+\int -2x^2dx+\int\pi\,dx=\frac{x^4}{24}-\frac{2x^3}{3}+\pi x+C$

b) $\int\left[(x+2)\left(x^2-1\right)\right]dx=\int\left(x^3+2x^2-x-2\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$

c)

$$\int\frac{x^5-3x+\sqrt{2}}{x^3}\,dx=\int\left(\frac{x^5}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{\sqrt{2}}{x^3}\right)dx=\int\left(x^2-3x^{-2}+\sqrt{2}x^{-3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-3\frac{x^{-1}}{-1}+\sqrt{2}\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x}-\frac{\sqrt{2}}{2x^2}+C$$

Př. 2: Vypočti:

a) $\int\sqrt{x}\,dx$ b) $\int x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}\right)dx$ c) $\int\frac{x^2-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$

a) $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

b)

$$\int x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}\right)dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+x^2\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+C$$

$$\int\frac{x^2-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx=$$

c)

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int 3x^{-1}\,dx+\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\int 3x^{-1}\,dx+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C-\int 3x^{-1}\,dx$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se samozřejmě opět opakují problémy s úpravou mocnin. Zajímavé také je, jak velkému množství studentů se podaří spočítat i $\int 3x^{-1}\,dx$ většinou takto $\int 3x^{-1}\,dx=3x^0=3$. V takovém případě je samozřejmě na místě otázka, zda si výsledek alespoň v hlavě zkusili zderivovat.

Integrál $\int 3x^{-1}\,dx$ spočítat neumíme, vzorec $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ platí pouze pro $n\neq -1$ $\Rightarrow$ musíme najít další vzorce, podle dalších pravidel pro derivace elementárních funkcí. Která elementární funkce se derivuje na $\frac{1}{x}$?

Př. 3: Doplň tabulku neurčitých integrálů:

derivace	$(\ln x)'=$		$(e^x)'=$	$(a^x)'=$
integrace				

derivace	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(e^x)'=e^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
integrace	$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$ $x\in(0;\infty)$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$	$\int e^x dx=e^x+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

Teď už můžeme dopočítat předchozí příklad:

$$\int\frac{x^2-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int 3x^{-1}\,dx+\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \left(e^x - \frac{2}{x} + 2^x \right) dx$ b) $\int \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx$ c) $\int \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{x} + \ln 3 \right) dx$

a) $\int \left(e^x - \frac{2}{x} + 2^x \right) dx = \int e^x \, dx - \int \frac{2}{x} dx + \int 2^x \, dx = e^x - 2\ln x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

b) $\int \left(\frac{3x^2 - x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx = \int \left(\frac{3x^2}{2x^3} - \frac{x}{2x^3} + e + 2^x \right) dx = \int \frac{3}{2x} dx - \int \frac{1}{2x^2} dx + \int e \, dx + \int 2^x \, dx =$

$= \frac{3}{2} \ln x - \frac{1}{2} (-1) x^{-1} + ex + \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{3}{2} \ln x + \frac{1}{2x} + ex + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

c) $\int \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{x} + \ln 3 \right) dx = \frac{1}{\ln 3} \int 3^x \, dx + \ln 3 \int \frac{1}{x} dx + \ln 3 \int dx = \frac{1}{\ln 3} \frac{3^x}{\ln 3} + \ln 3 \cdot \ln x + \ln 3 \cdot x + C =$

$= \frac{3^x}{\ln^2 3} + \ln 3 \cdot \ln x + x \ln x + C$

Pedagogická poznámka: Až příliš mnoho studentů jaksi nepostřehne, že e^x je něco jiného než x^n a integrují takto: $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ (tedy pomocí vzorce $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$).

Zajímavé je také, jak si studenti poradí s $\int e dx = ex + C$.

Př. 5: Petáková:
strana 163/cvičení 81 f) i) m) q) t)

Shrnutí: Funkce $y = \frac{1}{x}$ se neintegruje podle vzorce pro mocniny, ale podle zvláštního vzorce $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.