10.1.11 Výpočty limit II

Předpoklady: 10110

Př. 1: Urči body, ve kterých není definována funkce $y=\frac{1}{x^2-1}$. Vypočti jednostranné limity v těchto bodech.

Funkce obsahuje zlomek $\Rightarrow$ jmenovatel musí být různý od nuly
$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x\neq -1,\ x\neq 1$
$D(f)=R-\{-1;1\}$

- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}$:

  co dělá funkce $y=\frac{1}{x^2-1}$, když za x dosazujeme čísla, která jsou nepatrně větší než 1?

  Zkusíme například $x=1,01$: $y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{1,01^2-1}=\frac{1}{0,0201} \Rightarrow$ ve jmenovateli získáme velmi malé kladné číslo, jeho převrácená hodnota bude velmi velké kladné číslo. Jak se bude přibližovat hodnota x zprava k jedničce, budeme ve jmenovateli získávat čím dál menší kladná čísla a hodnotami funkce budou čím dál větší kladná čísla $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty$

- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}$:

  co dělá funkce $y=\frac{1}{x^2-1}$, když za x dosazujeme čísla, která jsou nepatrně menší než 1?

  Zkusíme například $x=0,99$: $y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0,99^2-1}=\frac{1}{-0,0199} \Rightarrow$ ve jmenovateli získáme záporné číslo s velmi malou absolutní hodnotou, jeho převrácená hodnota bude záporné číslo s obrovskou absolutní hodnotou. Jak se bude přibližovat hodnota x zleva k jedničce, budeme ve jmenovateli získávat záporná čísla s čím dál menší zápornou hodnotou a hodnotami funkce budou záporná čísla s čím větši absolutní hodnotou $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty$

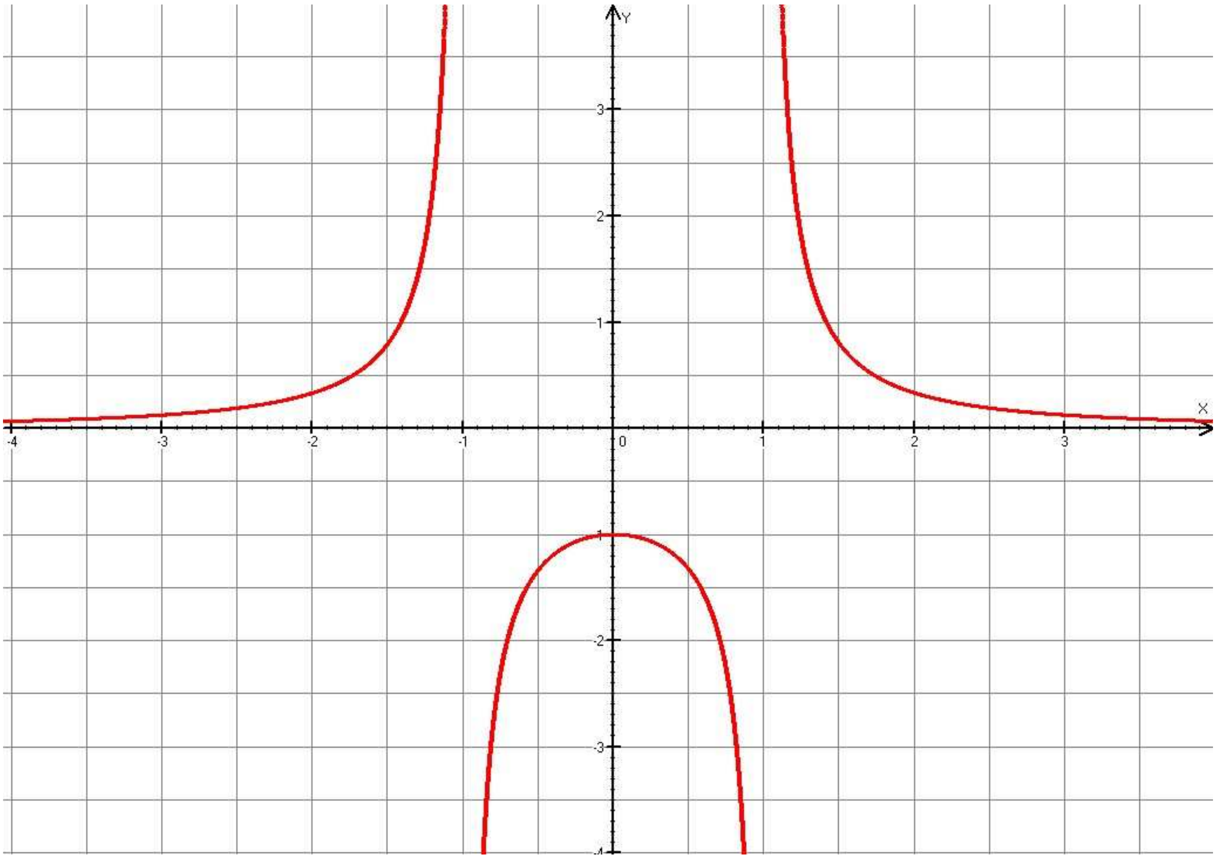
- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}$:

  Zkusíme například $x=-0,99$: $y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(-0,99)^2-1} \Rightarrow$ ve jmenovateli získáme velmi záporné číslo s malou absolutní hodnotou, jeho převrácená hodnota bude záporné číslo s obrovskou absolutní hodnotou. Jak se bude přibližovat hodnota x zprava k -1, budeme ve jmenovateli získávat záporná čísla s čím dál menší zápornou hodnotou a hodnotami funkce budou záporná čísla s čím dál větší absolutní hodnotou $\Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$

- zjišťujeme $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1}$:

  Zkusíme například $x=-1,01$: $y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(-1,01)^2-1}$ $\Rightarrow$ ve jmenovateli získáme velmi malé kladné číslo, jeho převrácená hodnota bude velmi velké kladné číslo. Jak se bude přibližovat hodnota x zleva k -1, budeme ve jmenovateli získávat čím dál menší kladná čísla a hodnotami funkce budou čím dál větší kladná čísla $\Rightarrow$ $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$

Správnost řešení předchozího příkladu si můžeme ověřit pomocí grafu funkce $y=\frac{1}{x^2-1}$.



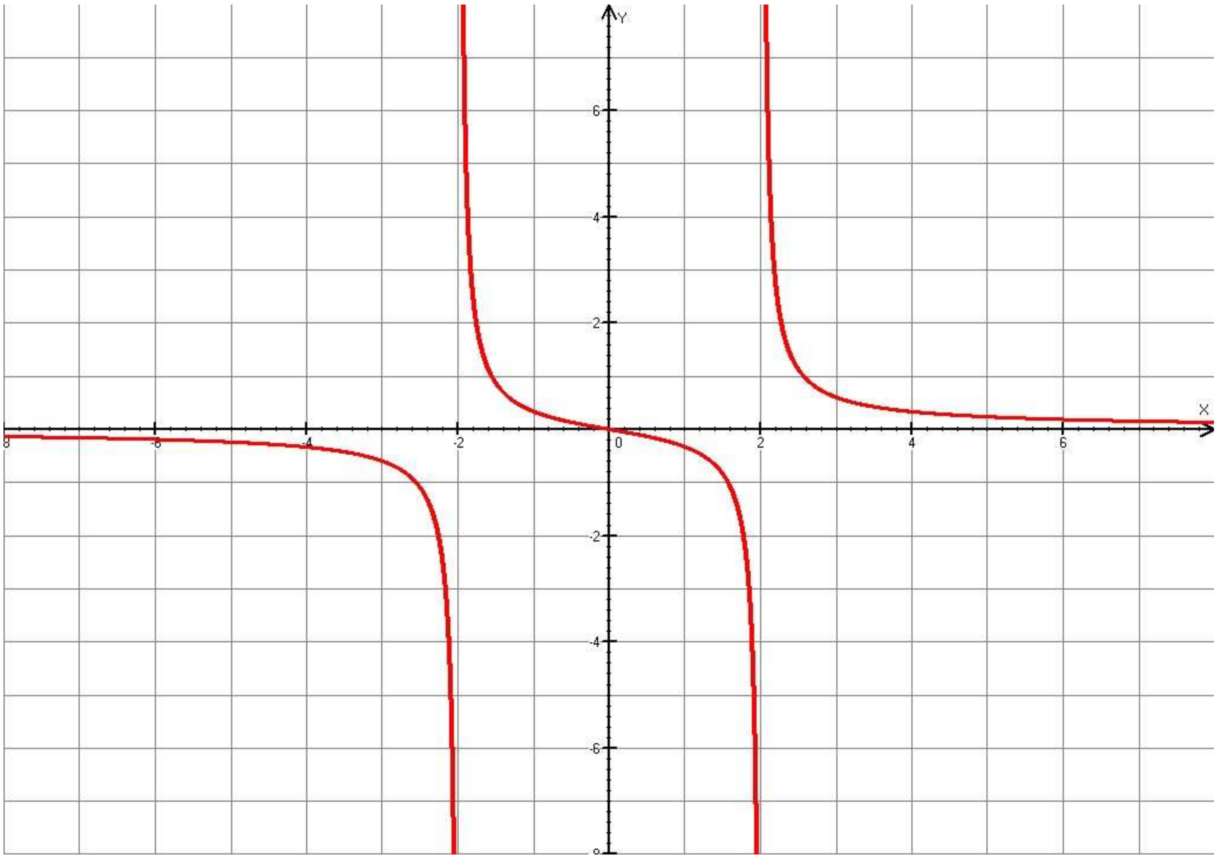
Pedagogická poznámka: První dvě jednostranné limity z předchozího příkladu spočítáme společně na tabuli, další počítají studenti sami.
Zdůrazňuji studentům, že není nutné do předpisu dosazovat konkrétní čísla, spíše jde o si představit, jak by vypadal přibližný výsledek v případě, že bychom nějaké číslo dosadili.
Minimálně na počátku se někteří studenti bez přímého dosazení neobejdou. Je potřeba, aby dosazovali čísla blízká bodu, ve kterém mají limitu spočítat. Někteří mají tendenci dosazovat podobně jako v metodě nulových bodů (tedy v případě limity zprava v podstatě jakékoliv větší číslo).

Př. 2: Urči body, ve kterých není definována funkce $y=\frac{x}{x^2-4}$. Vypočti jednostranné limity v těchto bodech.

Funkce obsahuje zlomek $\Rightarrow$ jmenovatel musí být různý od nuly
$x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x\neq -2$, $x\neq 2$
$D(f)=R-\{-2;2\}$

- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x^2-4}$:
  Zkusíme $x=2,01$: $y=\frac{x}{x^2-4}=\frac{2,01}{2,01^2-2^2} \Rightarrow$ kladná čísla dělíme velmi malými kladnými čísly $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$
- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}$:
  Zkusíme $x=1,99$: $y=\frac{x}{x^2-4}=\frac{1,99}{1,99^2-2^2} \Rightarrow$ kladná čísla dělíme zápornými čísly s velmi malou absolutní hodnotou $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty$
- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4}$:
  Zkusíme $x=-1,99$: $y=\frac{x}{x^2-4}=\frac{-1,99}{(-1,99)^2-2^2} \Rightarrow$ záporná čísla dělíme zápornými čísly s malou absolutní hodnotou $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$
- zjišťujeme $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4}$:
  Zkusíme $x=-2,01$: $y=\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2,01}{(-2,01)^2-2^2} \Rightarrow$ záporná čísla dělíme velmi malými kladnými čísly $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty$

Výsledek opět můžeme ověřit pomocí grafu:



Zbývají pouze limity v nevlastních bodech. Hodnoty některých limit známe už z kapitoly o posloupnostech nebo z vlastností funkcí.

Př. 3: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ neexistuje h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

Pedagogická poznámka: Předchozí limity by si studenti měli představit sami, v případě potřeby si mohou nakreslit grafy funkcí. Jde o to, aby si uvědomili, že už jsme se o limitách ve skutečnosti bavili vždy, když jsme používali věty typu: „pro x jdoucí k nekonečnu se hodnoty blíží nule“.

U složitějších funkcí postupujeme podobně jako u posloupností:

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 - 2x^3 + x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^4 \left(1 - 2\frac{x^3}{x^4} + \frac{x^2}{x^4}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \cdot (1 + 0 + 0) = +\infty$$

Př. 4: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3-2x^2+2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2-2x+3$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4-105x^3-1000$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3-2x^2+2$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-2x+3$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4-105x^3-1000$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3-2x^2+2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=+\infty\cdot(-2-0+0)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2-2x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty\cdot(-2-0+0)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4-105x^3-1000=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{105}{x}-\frac{1000}{x^4}\right)=+\infty\cdot(2-0-0)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3-2x^2+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=-\infty\cdot(2-0+0)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-2x+3=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty\cdot(2-0+0)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4-105x^3-1000=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2-\frac{105}{x}-\frac{1000}{x^4}\right)=+\infty\cdot(-2-0-0)=-\infty$

Také u racionálních funkcí můžeme používat postup, který jsme se naučili u posloupností:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x+2}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0+0}{1+0}=2$$

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2}{x^2+3x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-2x+3}{3x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x}{2x^3+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x^2+2}{-x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^2-2x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+7}{x^3-100}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{1+\frac{3}{x}}=\frac{\infty-2}{1+0}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-2x+3}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{-2-0+0}{3+0}=-\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x}{2x^3+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0}{2+0+0}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+4x^2+2}{-x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{-1} = \frac{2+0+0}{-1} = -2$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^2}{2x^2-2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{-\infty-1}{2-0+0} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+7}{x^3-100} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{100}{x^3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{100}{x^3}} = \frac{-0+0}{1-0} = 0$

Př. 6: Petáková:
strana 154/cvičení 11 c) d)
strana 154/cvičení 12 a) d)

Shrnutí: Jednostranné limity určujeme dosazením, limity v nevlastních bodech pak podobně jako u posloupností.