

10.1.3 Spojitost funkce, limity funkce I

Předpoklady: 8301

Pedagogická poznámka: Postup, který používám pro zavedení limit a spojitosti příliš neodpovídá tomu, co se píše v učebnicích, ale mě se rozhodně osvědčil. Studenti se ve dvou hodinách naučí, jak z grafů poznat jednotlivé druhy spojitostí a limit a tak mohou po zvládnutí definice spojitosti v bodě, sestavovat naprostou většinu definic sami.

Pedagogická poznámka: Pokud budete učit tuto hodinu podle této učebnice, chtěl bych Vás poprosit, abyste obrázky, na kterých jsou vysvětlovány nové pojmy buď kreslili na tabuli nebo promítali tak, abyste v nich mohli plynule ukazovat, jak se hodnoty x blíží k bodu a hodnoty y se blíží k jinému rukama. Tato hodina patří mezi ty, kdy je učitel opravdu nenahraditelný.

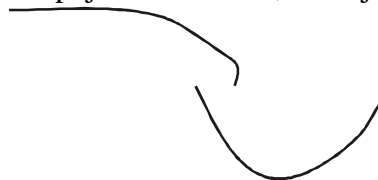
V této hodině se budeme snažit pochopit význam termínů spojitost funkce a limita funkce na příkladech (obrázcích). Naším cílem v žádném případě nebude přesné matematické popsání toho, jak je možné dokázat, že nějaká funkce spojitá je nebo není, či jakou má funkce v kterém bodě limitu.

Spojitost

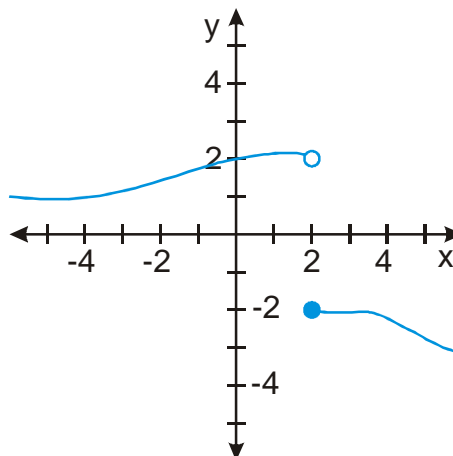
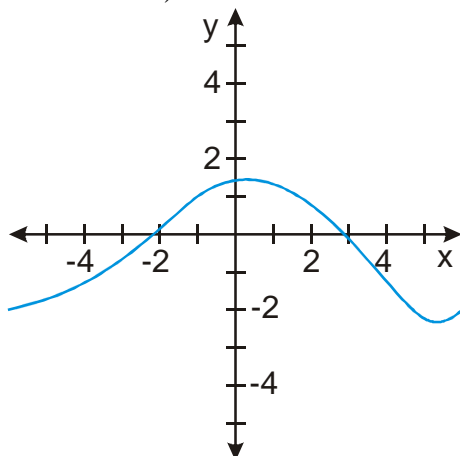
Spojitá čára - čára nakreslená jedním tahem:



Nespojitá čára - čára, která je přerušená (napsaná dvěma nebo více tahy)



Stejným způsobem můžeme rozlišit spojitost funkce podle grafu (popravdě řečeno není to moc matematické).



Funkce je spojitá (lépe řečeno spojitá v každém bodě definičního oboru), protože čára jejího grafu není nikde přerušena.

Čára grafu funkce je přerušena \Rightarrow **funkce není spojitá**

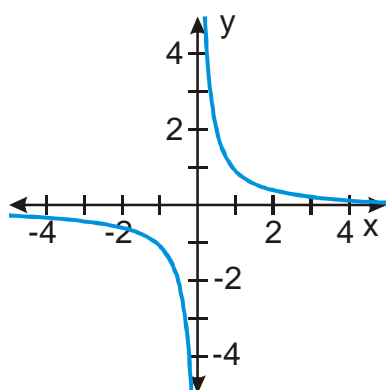
přesněji: není spojitá v bodě $x = 2$ (v tomto bodě došlo k přerušení), v ostatních bodech spojitá je (tam čára přerušena není).

Situace na pravém grafu si zaslouží bližší prozkoumání:

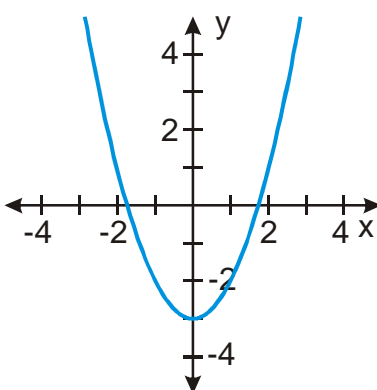
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zprava, dostaneme se do bodu 2 aniž bychom museli přeskakovat přerušené místo \Rightarrow **funkce je v bodě 2 spojitá zprava**
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zleva, musíme přeskočit přerušené místo, abychom se do bodu 2 dostali \Rightarrow **funkce není v bodě 2 spojitá zleva**

Pedagogická poznámka: U obou předchozích i všech následujících obrázků dochází k tomu, že někteří studenti až příliš pečlivě obkreslují každou (i nepodstatnou) drobnost (spíše než o neschopnost jde o zdržovací úmysly). Trvám na tom, že každý musí kreslení obrázků stíhat a vynechávání nepodstatných detailů je součástí jejich úkolu.

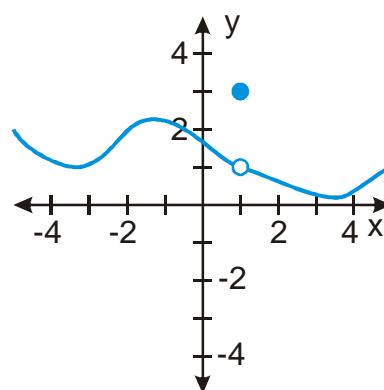
Př. 1: Rozhodni, zda jsou následující funkce spojité. Pokud jsou nespojité, najdi body nespojitosti a rozhodni, zda jsou v těchto bodech spojitě alespoň zleva nebo zprava.



Není spojitá v bodě 0.
V tomto bodě není spojitá ani zleva ani zprava (nemá v něm vůbec hodnotu)



Je spojitá.



Není spojitá v bodě 1.
Hodnotu v tomto bodě má, ale není v něm spojitá ani zleva ani zprava.

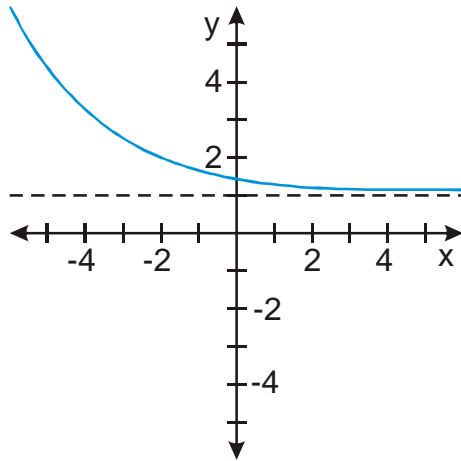
Limita

O limitě jsme už mluvili v kapitole o posloupnostech: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$

- 1 vzhledem k rostoucímu n hraje jednička stále menší roli a zlomek se neustále přibližuje zlomku $\frac{3n}{n} = 3$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{3+0}{1} = 3$
- pokud uděláme kolem čísla 3 na ose y libovolně úzký pás, pokaždé najdeme takové n , že všechny hodnoty posloupnosti za a_n budou v tomto pásu ležet

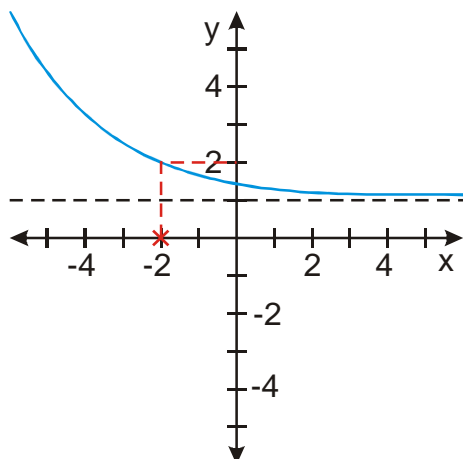
⇒ „hodnoty posloupnosti směřují k číslu 3 tak, že mezi posloupností a 3 nezůstane žádná díra“

Je rozumné mluvit o limitách u funkcí? Mohou se hodnoty funkcí k něčemu blížit?



- Hodnoty funkce se pro x jdoucí k nekonečnu blíží k 1 (stejná situace jako u posloupností) ⇒ funkce má v nekonečnu limitu 1. Píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
- Pro funkci se může x blížit také k $-\infty$: hodnoty funkce pro x jdoucí k nekonečnu rostou nade všechny meze (blíží se k ∞) ⇒ funkce má v mínus nekonečnu limitu ∞ . Píšeme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ (protože jde o nekonečno, budeme ji stejně jako u posloupností říkat nevlastní).

Je možné mluvit u funkcí i o jiných limitách než v ∞ a $-\infty$? Podíváme se na graf v nějakém bodě:



Když se hodnoty x blíží k -2 , blíží se hodnoty y ke 2 (opět by se tam nenašly žádné mezery)
 \Rightarrow funkce $f(x)$ má v bodě -2 limitu 2. Píšeme $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$.

- limitu tohoto typu u posloupností nenajdeme (mezi body posloupnosti jsou díry)
- zdá se to zbytečné, protože u nakreslené funkce $f(x)$ najdeme podobnou limitu v každém bodě a vždy se bude rovnat funkční hodnotě, ale u méně hezkých funkcí to tak zbytečné není.

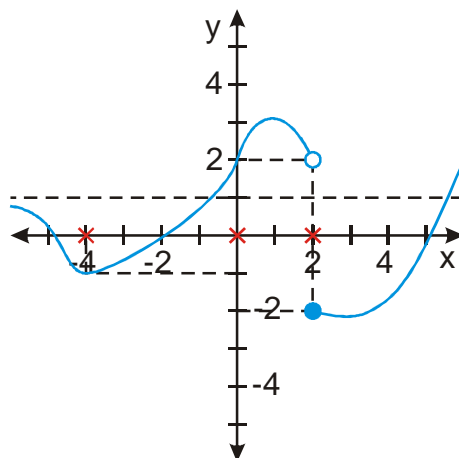
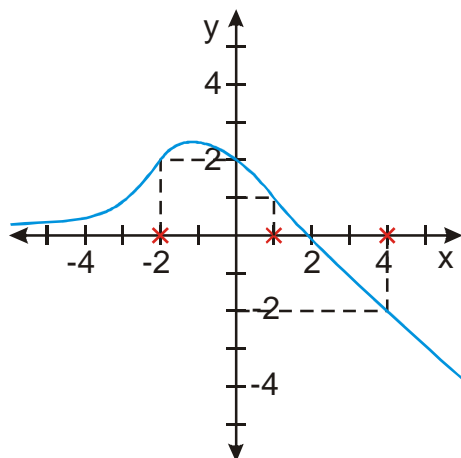
Abychom odlišili $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$ od předchozích, říkáme jí **limita ve vlastním bodě** (do předpisu funkce opravdu můžeme dosadit číslo -2)

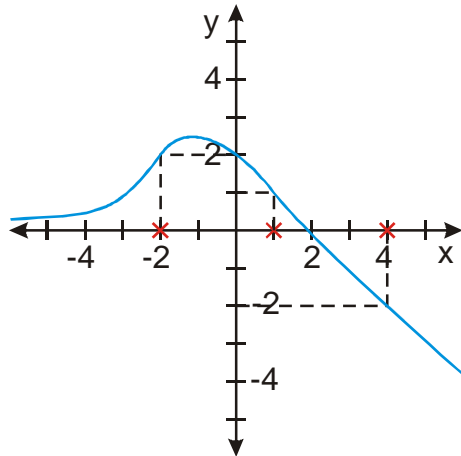
Limitám $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ říkáme **limity v nevlastním bodě** (nekonečna do předpisu dosadit nedokážeme).

Pedagogická poznámka: Při určování limit postupují studenti značně rozdílnou rychlostí.

Pro rychlejší část studentů je připraven příklad 5, který jim přece jenom nějaký čas zabere.

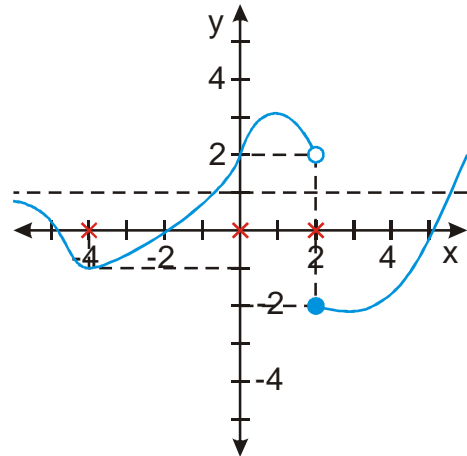
Př. 2: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech.





$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

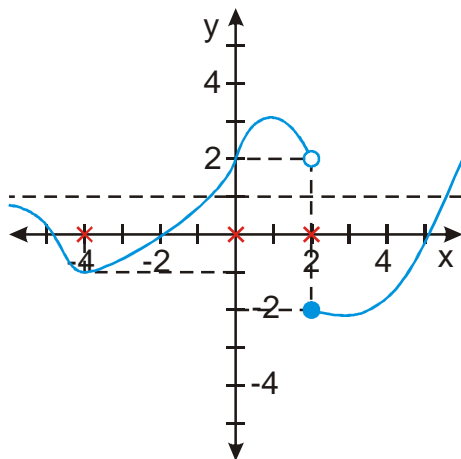
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

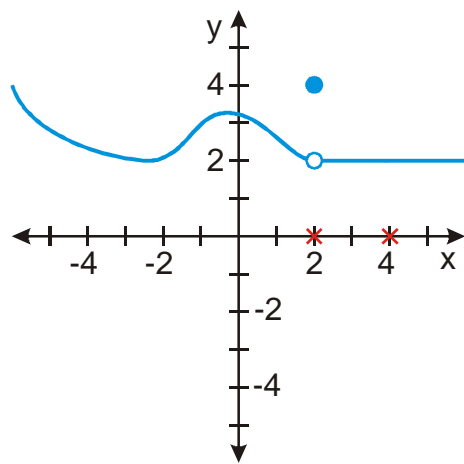
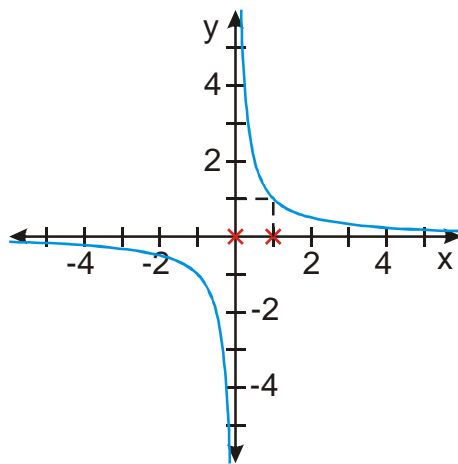
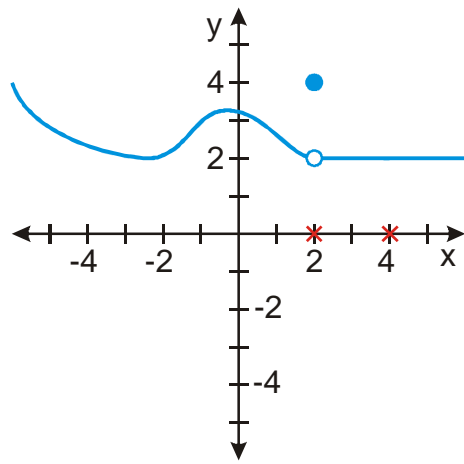
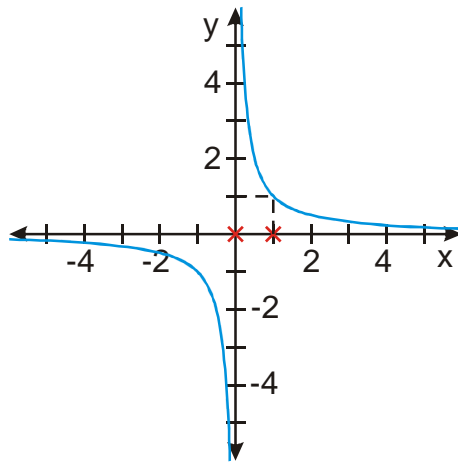
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$



Situaci kolem bodu 2 si rozebereme podrobněji:

- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zprava (od větších hodnot), zdá se nám, že hodnoty y se blíží číslu $-2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$ (limita zprava v bodě 2 se rovná -2)
- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zleva (od menších hodnot), zdá se nám, že hodnoty y se blíží číslu $2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ (limita zleva v bodě 2 se rovná 2)
- protože při blížení k $x = 2$ z obou stran se v y blížíme k různým číslům, nemůže říct, že by se hodnota funkce $f(x)$ pro $x = 2$ blížila k nějakému číslu $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ neexistuje

Př. 3: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech. Pokud v nějakém z vyznačených bodů limita neexistuje, urči (pokud existují) jednostranné limity.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

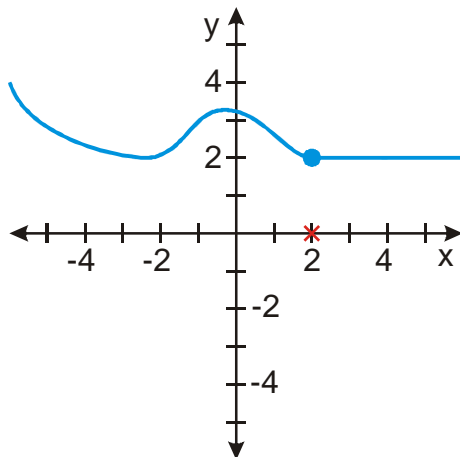
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 2 & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 2 & \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: S $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ má hodně studentů problém, plete je $f(2) = 4$, proto následuje další rozbor, který by měl nejasnosti odstranit.

Př. 4: Je možné změnit hodnotu funkce pro $x = 2$ na pravém obrázku z předchozího příkladu tak, aby:

- funkce byla spojitá
- neexistovala $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

a) pokud má být funkce spojitá, musíme odstranit její přetržení tím, že kolečko ucpe prázdné místo \Rightarrow pokud bude $f(2) = 2$



b) není možné zvolit takovou funkční hodnotu neexistovala $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, při libovolné volbě $f(2)$ budeme ve stejné situaci jako u předchozího příkladu

Hodnota $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ je dána tím, čemu se blíží hodnoty funkce, když se proměnná x blíží hodnotě a a proto vůbec nezávisí na hodnotě funkce v bodě a $f(a)$.

Spojitosť funkce v bodě a naopak na hodnotě $f(a)$ závisí.

Př. 5: Najdi:

- Vztah mezi spojitostí zleva, spojitostí zprava a spojitostí funkce v bodě.
- Vztah mezi jednostrannými limitami a limitou ve vlastním bodě
- Vztah mezi limitou ve vlastním bodě a spojitostí funkce v tomto bodě

z předchozích příkladů vyplývá:

a)

Funkce je v bodě a spojitá, právě když je v bodě a spojitá zleva i zprava.

b)

Funkce má v bodě a limitu, právě když platí $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

c)

Funkce je v bodě a spojitá, právě když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Shrnutí: Spojitosť (nepřetrženost) i limita (blížení se) jsou snadno pochopitelné z obrázků.