8.3.6 Nekonečná geometrická řada

Předpoklady: 8302, 8305

Máme list papíru. Rozstřihneme ho na dvě poloviny, jednu dáme na hromádku a druhou opět rozstřihneme na poloviny (tedy čtvrtiny původního listu). Jednu z těchto polovin opět položíme na hromádku a zbývající opět stříhneme na půl. A tak budeme postupovat pořád dál. Jak velký kus papíru bude na hromádce po nekonečně mnoho rozstřiženích?

Na hromádce je všechen papír z původního listu, kromě kousku, který držíme v ruce. Velikost kousku v ruce (tedy toho, co nám chybí k tomu, aby na stole byl celý papír) se velmi rychle zmenšuje (blíží se k nule), ale pořád nám v ruce něco zbývá (taky nám zbývá ještě nekonečněkrát rozstřihnout zbyteček papíru v ruce) $\Rightarrow$ na stav po nekonečně mnoho rozstřiženích se nemůžeme dívat jako na něco dosažitelného reálným stříháním, jde o stav, ke kterému situace reálným stříháním pouze směřuje $\Rightarrow$ protože kousek papíru v ruce směřuje k nule, směřuje velikost hromádky k původní velikosti listu $\Rightarrow$ po nekonečně mnoho rozstřiženích bude na stole opět celý papír.

Zajímavé – součtem nekonečně mnoho papírků jsme nezískali nekonečně velkou papírovou plochu, ale pouze plochu o velikosti 1 $\Rightarrow$ součet nekonečně mnoho čísel nemusí být nekonečný $\Rightarrow$ má smysl ho zkoumat

Dodatek: Pokud se zeptáte na střihání papírků, většina studentů bude ihned souhlasit s tím, že součet bude konečný (problém je spíš přesvědčit studenty, že nebude nic chybět). Pokud se zeptáte ještě před tím, bude počet těch, kteří u nekonečného součtu předpokládají nekonečný výsledek.
Jinak fakt, že i součet nekonečně mnoha čísel může být konečný, je vysvětlením některých aporií, například Achillea a želvy.

Vrátíme se ke stříhání papírků.

Př. 1: Najdi posloupnosti, které udávají:
a) velikost papírku, který vznikl n-tým střihem
b) součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n-tém střihu.
Řešení zapisuj do tabulky:

	velikost papírku, který vznikl n-tým střihem	součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n-tém střihu	
první střih	$a_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$s_1 = a_1$

	velikost papírku, který vznikl n-tým střihem	součet ploch všech papírků, které jsou na hromádce po n-tém střihu	

první střih	$a_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$s_1 = a_1$
druhý střih	$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$s_2 = a_1 + a_2$
třetí střih	$a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
…	…	…	…
n-tý střih	$a_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$	$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Plocha všech nastřihaných papírků se rovná součtu prvních n členů geometrické posloupnosti

$\Rightarrow$ použijeme vzorec: $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

Zajímá nás, co udělá součet, když se n blíží k nekonečnu $\Rightarrow$ spočítáme limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1$$

Výsledek odpovídá našemu odhadu.

Terminologie:

na začátku jsme měli posloupnost: $a_1; a_2; ...; a_n; ... = (a_n)_{n=1}^{\infty}$

- symbol $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečná řada** (ze členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)
- pokud je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická s kvocientem q nazýváme symbol $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q (náš předchozí a obecně nejčastější případ)
- posloupnost $s_1 = a_1$; $s_2 = a_1 + a_2$; … ; $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$; … = $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jejíž členy vznikly sčítáním prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupnost částečných součtů**
- když jsme hledali součet nekonečné řady, zjišťovali jsme zda je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů konvergentní (má limitu).
- Když je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme že **nekonečná řada** $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet** platí: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

- Když je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentní (nemá limitu), říkáme že **nekonečná řada** $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nemá součet**.

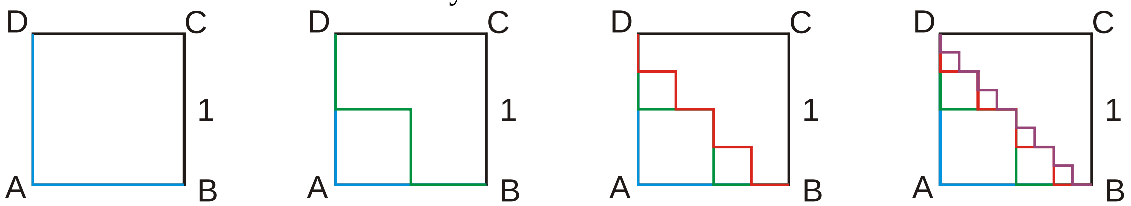
Př. 2: Je dána posloupnosti $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Vypiš prvních osm členů posloupnosti. Sestav posloupnost částečných součtů odpovídající nekonečné řady a rozhodni zda má tato řada součet.

prvních osm členů: $-1;1;-1;1;-1;1;-1;1;...$
částečné součty:
$s_1 = -1$
$s_2 = -1+1 = 0$
$s_3 = -1+1-1 = -1$
$s_4 = -1+1-1+1 = 0$
…

posloupnost částečných součtů vypadá takto: $-1;0;-1;0;-1;0;...$
$\Rightarrow$ posloupnost neustále osciluje mezi dvěma hodnotami (-1 a 0) $\Rightarrow$ není konvergentní $\Rightarrow$ nekonečná řada $-1+1-1+1-1+...$ nemá součet.

Výsledek předchozího příkladu znamená, že nemůžeme psát za výraz $-1+1-1+1-1+...$ znaménko rovnosti s nějakým výsledkem. „Správných“ výsledků by totiž bylo nekonečně mnoho (kvůli podivnosti nekonečna).
Ve všech následujících výpočtech rozdělíme řadu $-1+1-1+1-1+...$ na dvojice stejné barvy s nulovým součtem a zbytek, ze kterého získáme „výsledek“:
$-1+1-1+1-1+1-1+... = 0$
$-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = -1$
$-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = 1$
$-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = -2$
Při troše snahy získáme jako „výsledek“ libovolné celé číslo $\Rightarrow$ závěr, že vůbec nemá smysl hledat součet řady $-1+1-1+1-1+...$ je velice rozumný.

Př. 3: Najdi chybu v následující úvaze:
Nakreslíme si čtverec o délce strany 1.



Postupně kreslíme lomené čáry L_1, L_2, L_3, L_4, … (viz obrázek). Lomené čáry se postupně blíží úhlopříčce čtverce. Velikost lomených čar se rovná 2 $\Rightarrow$ délka úhlopříčky čtverce o straně 1 je rovna 2.

Tvrzení v textu je zjevně nesprávné, protože délka úhlopříčky je $\sqrt{2}$.

Důvod je zřejmý. Pokud bychom se na délku úhlopříčky chtěli dívat jako na součet nekonečné řady složené z nekonečného členu posloupnosti L_n, musela by délka úhlopříčky být limitou délek lomených čar. Tak tomu, ale není neboť rozdíl mezi délkou úhlopříčky a délkami lomených čar se nezmenšuje.

Př. 4: Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem *q*. Rozhodni, pro jaké hodnoty kvocientu *q* bude mít nekonečná geometrická řada
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet a vypočti ho.

Pokud má mít nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet, musí mít posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu *s*, tedy se její členy musí této hodnotě postupně blížit $\Rightarrow$ členy původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, které způsobují rozdíly mezi členy posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, se musí blížit nule (kdyby se neblížily nule, nemohli bychom sečtením nekonečně mnoha členů získat konečné číslo) $\Rightarrow$ musí platit $|q| < 1$.
Hledáme součet: $\Rightarrow$ hledáme limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$
s_n je součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ platí: $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.
Součet řady je limitou posloupnosti s_n $\Rightarrow$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} q^n - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} q - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = a_1 \cdot \frac{0-1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

> Nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ve které $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient *q* platí $|q| < 1$. Pro součet *s* konvergentní geometrické řady platí $s = \dfrac{a_1}{1-q}$

Následující příklad je opravdu bonusový pouze pro ty, kteří by se určováním součtu nekonečných geometrických řad nudili.

Př. 5: (BONUS) Je dána posloupnost $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Rozhodni, zda existuje součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, pokud existuje urči ho.

Prvních několik členů posloupnosti $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$: $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{20}; \dfrac{1}{30}; \ldots$
Hledáme částečné součty:

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$s_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$s_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

…

$\Rightarrow$ zdá se, že platí: $s_n = \frac{n}{n+1}$. Musíme si to ověřit, například matematickou indukcí:

1. ověříme pro $n = 1$

$s_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ vyšlo

2. předpokládáme platnost pro *k*, dokazujeme platnost pro $k+1$

předpoklad: $s_k = \frac{k}{k+1}$

dokazujeme platnost pro $k+1$ (chceme získat vzorec $s_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$) :

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$\Rightarrow$ vzorec platí $\Rightarrow$ stačí spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Zkoumaná řada má součet a je roven 1.

Př. 6: Urči součet nekonečných řad:

a) $\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^n} + ...$

b) $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + ... +$

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + ...$

d) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + ...$

a) $\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^n} + ... \Rightarrow$ platí: $a_1 = \frac{1}{10}$, $q = \frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ řada konverguje $|q| < 1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$

b) $4+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\ldots+\ \Rightarrow$ platí: $a_1=4,\ q=\frac{2}{3}\ \Rightarrow$ řada konverguje $|q|<1$

Dosadíme do vzorce: $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{\frac{1}{3}}=12$

c) $2+3+\frac{9}{2}+\ldots\ \Rightarrow$ platí: $a_1=2,\ q=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$ součet neexistuje $q\geq 1$

d) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots\Rightarrow$ platí: $a_1=\frac{2}{3},\ q=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow$ řada konverguje $|q|<1$

Dosadíme do vzorce: $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}$

Př. 7: Petáková:
strana 72/cvičení 70 b) c) d)
strana 72/cvičení 71 b) d)
strana 72/cvičení 72 b) c) e) i)

Shrnutí: Součet nekonečně mnoha čísel nemusí být nekonečné číslo. Součet takových geometrických řad určíme dosazením do vzorce $s=\frac{a_1}{1-q}$.