8.2.1 Aritmetická posloupnost

Předpoklady: 8101, 8102, 8103, 8107

Pedagogická poznámka: V hodině rozdělím třídu na dvě skupiny a každá z nich dělá jeden z prvních dvou příkladů.

Př. 1: V továrně dokončí každou hodinu montáž 3 automobilů. Na začátku směny bylo ve skladu (po předchozí směně) 5 neodvezených automobilů. Kolik hotových automobilů bude na skladě na konci směny (po 8 hodinách), pokud v jejím průběhu žádný hotový automobil neodvezou? Příklad řeš jako rekurentní posloupnost.

Budeme sledovat počet automobilů po hodinách:

$a_1 = 5$ (na začátku směny)

$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$

$a_5 = a_4 + 3 = 14 + 3 = 17$

$a_6 = a_5 + 3 = 17 + 3 = 20$

$a_7 = a_6 + 3 = 20 + 3 = 23$

$a_8 = a_7 + 3 = 23 + 3 = 26$

$a_9 = a_8 + 3 = 26 + 3 = 29$

Na konci směny bude ve skladu 29 automobilů.

Př. 2: V zemské troposféře platí, že s rostoucí výškou klesá teplota. Vzrůst nadmořské výšky o 1 km znamená pokles teploty o $6,5°\mathrm{C}$. Urči teplotu v nadmořské výšce 5 km, pokud je při hladině moře $25°\mathrm{C}$. Příklad řeš jako rekurentně zadanou posloupnost.

Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě, postupně počítáme teploty v jednotlivých výškách:

$t_1 = 25$ (při hladině moře)

$t_2 = t_1 - 6,5 = 25 - 6,5 = 18,5$

$t_3 = t_2 - 6,5 = 18,5 - 6,5 = 12$

$t_4 = t_3 - 6,5 = 12 - 6,5 = 5,5$

$t_5 = t_4 - 6,5 = 5,5 - 6,5 = -1$

$t_6 = t_5 - 6,5 = -1 - 6,5 = -7,5$

Ve výšce 5 km je teplota $-7,5°\mathrm{C}$.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností.

U obou předchozích posloupností platí, že rozdíl mezi dvěma sousedními členy v posloupnosti je konstantní (v prvním případě jsme pořád přičítali stejné číslo, ve druhém případě jsme stále stejné číslo odečítali).

Posloupnost s uvedenou vlastností se nazývá **aritmetická**.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická právě když existuje takové číslo *d*, že pro každé přirozené číslo *n* platí $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo ***d*** se nazývá **diference posloupnosti**.

Pro diferenci platí: $d = a_{n+1} - a_n$ a tím se vysvětluje i její volba názvu.

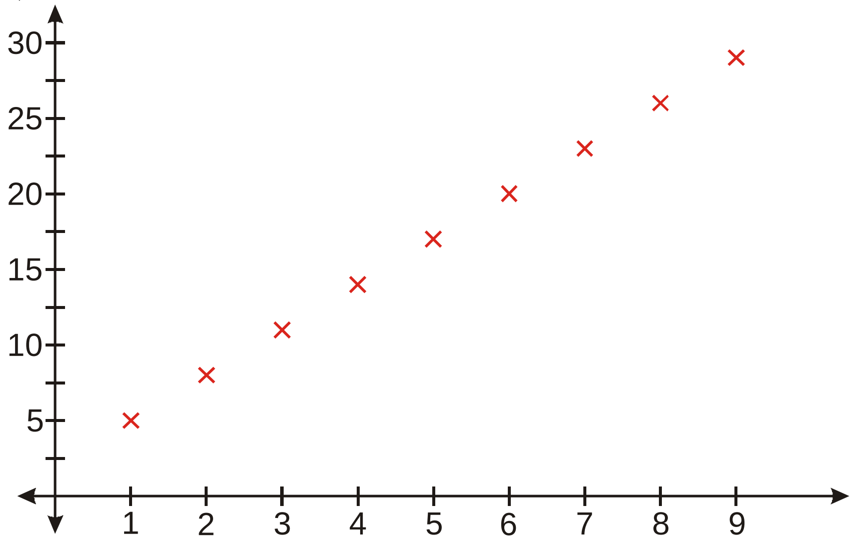
Př. 4: Urči diference aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2.

a) v příkladu 1 platí: $a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow d = 3$
b) v příkladu 2 platí: $a_{n+1} = a_n - 6{,}5 \Rightarrow d = -6{,}5$

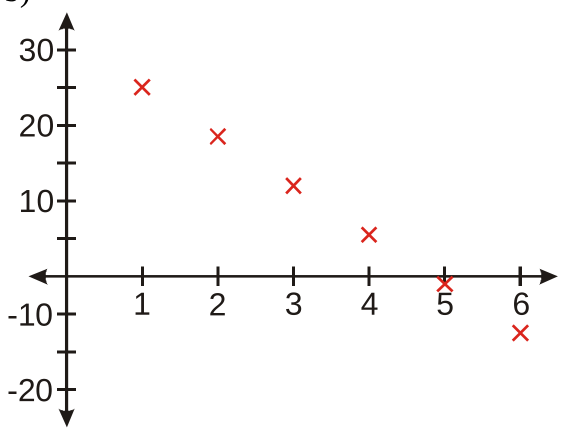
Pedagogická poznámka: Jako obvykle v těchto situacích. Příklad není zbytečný, někteří teprve nyní začínají vnímat předchozí definici.

Př. 5: Načrtni grafy aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2. Jaký typ funkce je analogií aritmetické posloupnosti?

a)



b)



V obou případech leží všechny body grafu v přímce $\Rightarrow$ aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce.

Dodatek: Předchozí závěr je zřejmý i faktu, že diference (tedy rozdíl mezi následujícími hodnotami) je stále stejná.

Př. 6: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké aritmetické posloupnosti. Pokud ano urči diferenci.

a) $\frac{1}{6};\frac{7}{12};1$

b) $x^2-3;\left(x-1\right)^2;\left(x-2\right)^2$

pokud zadaná trojice čísel tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, musí být jejich rozdíl stejné číslo

a) $\frac{1}{6};\frac{7}{12};1$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{7-2}{12}=\frac{5}{12}$$

$$a_{n+1}-a_n=1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $\frac{5}{12}$.

b) $x^2-3;\left(x-1\right)^2;\left(x-2\right)^2$

$$a_n-a_{n-1}=\left(x-1\right)^2-\left(x-2\right)^2=\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-4x+4\right)=2x-3$$

$$a_{n+1}-a_n=\left(x^2-3\right)-\left(x-1\right)^2=x^2-3-\left(x^2-2x+1\right)=2x-4$$

Nejde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, rozdíly po sobě jdoucích čísel jsou různé.

Př. 7: Dokaž, že posloupnost $\left(3n-1\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Hledáme v definici aritmetické posloupnosti podmínku, která odlišuje aritmetickou posloupnost od ostatních posloupností $\Rightarrow$ musíme dokázat, že platí: $a_{n+1}=a_n+d$.

$$a_n=3n-1$$

$$a_{n+1}=3\left(n+1\right)-1=3n+2$$

Dosadíme: $a_{n+1}-a_n=3n+2-\left(3n-1\right)=3=d$

Rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní $\Rightarrow$ posloupnost $\left(3n-1\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická (s diferencí 3).

Pedagogická poznámka: I když nejde o nic jiného než zopakování příkladu 6, mají studenti se 7 značné problémy.

Aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce, průběh aritmetické posloupnosti je pravidelný $\Rightarrow$ měl by existovat vzorec pro *n*-tý člen.

Př. 8: Najdi vzorec pro *n*-tý člen posloupností z příkladů 1 a 2. Vyslov hypotézu o vzorci aritmetické posloupnosti: $a_1; a_{n+1} = a_n + d; n \in N$.

a) zkusím si upravovat členy posloupnost tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

$a_1 = 5$ (na začátku směny)

$a_2 = a_1 + 3 = a_1 + 1 \cdot 3 = 8$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$

$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = 5 + 3 \cdot 3 = 14$

$a_5 = a_4 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 4 \cdot 3 = 17$

….

$a_n = a_{n-1} + 3 = 5 + (n-1) \cdot 3$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[5 + (n-1) \cdot 3\right]_{n=1}^{\infty}$.

b) zkusím si upravovat členy posloupnost tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

$t_1 = 25$ (na hladině moře)

$t_2 = t_1 - 6,5 = t_1 - 1 \cdot 6,5 = 18,5$

$t_3 = t_2 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 2 \cdot (-6,5) = 12$

$t_4 = t_3 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 3 \cdot (-6,5) = 5,5$

$t_5 = t_4 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 4 \cdot (-6,5) = -1$

….

$t_n = t_{n-1} - 6,5 = t_1 + (n-1) \cdot (-6,5)$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[25 + (n-1) \cdot (-6,5)\right]_{n=1}^{\infty}$.

Oba odvozené vzorce mají stejný tvar: $a_1 + (n-1)d \Rightarrow$ zřejmě platí: Aritmetická posloupnost je dána vzorcem $\left[a_1 + (n-1)d\right]_{n=1}^{\infty}$

Pedagogická poznámka: Tady je potřeba hlídat studenty (spíše ty chytřejší). Často odvozují vzorec ve tvaru $\left[a_1 + n \cdot d\right]_{n=1}^{\infty}$ a tento vzorec jim dokonce dává i správné výsledky, protože v příkladech jako je 1 nebo 2 indexují od 0. Například počet aut ve skladu po osmi hodinách práce pro ně není a_9, ale a_8 (bezpochyby je to i logičtější). Je nutné, aby si studenti ujasnili, že u posloupností značíme a_1 první člen , tedy člen, ke kterému se diference nepřičítala ještě ani jednou a proto se při cestě ke členu a_n přičítala pouze $(n-1)$ krát (index zkrátka nesouvisí s počtem přičítání diference, ale umístěním členu v řadě).

O správnosti naší hypotézy se musíme přesvědčit. Zkusíme důkaz matematickou indukcí:

Př. 9: Dokaž větu: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí *d* platí pro každé $n \in N$ $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1. Ověříme platnost pro $n = 1$

$a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1 \Rightarrow$ pro $n = 1$ vzorec platí

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k **a dokazujeme, že platí i pro** $k+1$

Víme: $a_k = a_1 + (k-1)d$

Chceme dokázat: $a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]d = a_1 + k \cdot d$

Určitě platí rekurentní vztah pro aritmetickou posloupnost: $a_{k+1} = a_k + d$

Dosadíme do rekurentního vyjádření za $a_k = a_1 + (k-1)d$:

$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd$ - to jsme chtěli

Podařilo se nám vztah dokázat.

Pedagogická poznámka: Pokud nestíháme, předchozí příklad vynecháváme a důkaz buď rychle udělám na tabuli nebo ho úplně přeskočíme.

Teď už můžeme napsat s jistotou:

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí *d* platí pro každé $n \in N$
$a_n = a_1 + (n-1)d$.

Př. 10: U následujících aritmetických posloupností sestav vzorec pro *n*-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_{13}.

a) $a_1 = 4$, $d = -2$

b) $a_2 = 8; d = 5$

c) $[7 + (n-1)2]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1 = \pi; a_{n+1} = a_n + 2\pi; n \in N$

e) $[-2 + n \cdot 3]_{n=1}^{\infty}$

a) $a_1 = 4$, $d = -2$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2, n \in N$

vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)(-2)$

$a_{13} = 4 + (13-1)(-2) = -20$

b) $a_2 = 8; d = 5$

nejdříve si určíme a_1: $a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_1 = a_2 - d = 8 - 5 = 3$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 5, n \in N$

vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 5$

$a_{13} = 3 + (13-1) \cdot 5 = 63$

c) $\left[7+(n-1)2\right]_{n=1}^{\infty}$

posloupnost je zadaná vzorcem pro *n*-tý člen $\Rightarrow$ $a_1 = 7$, $d = 2$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 7; a_{n+1} = a_n + 2, n \in N$

vzorec pro *n*-tý člen už máme

$a_{13} = 7 + (13-1)\cdot 2 = 31$

d) $a_1 = \pi; a_{n+1} = a_n + 2\pi; n \in N$

rekurentní vyjádření už máme

$a_1 = \pi$, $d = 2\pi$

vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d = \pi + (n-1)\cdot 2\pi$

$a_{13} = \pi + (13-1)\cdot 2\pi = 25\pi$

e) $\left[-2+n\cdot 3\right]_{n=1}^{\infty}$

pozor, to není vzorec pro *n*-tý člen $\Rightarrow$ musíme vztah upravit do tvaru vzorce pro *n*-tý člen

$-2+n\cdot 3-3+3=-2+3(n-1)+3=1+(n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_1 = 1,\ d = 3$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 3; n \in N$

vzorec pro *n*-tý člen už máme

$a_{13} = 1 + (13-1)\cdot 3 = 37$

Př. 11: Petáková:

strana 67/cvičení 9 a)

strana 67/cvičení 10 a)

strana 67/cvičení 11 a) b) c)

strana 67/cvičení 15 a) b)

strana 68/cvičení 17 a) b)

Shrnutí: Posloupnost jejíž po sobě následující členy se liší o stejné číslo se nazývá aritmetická. Při výpočtu jejího *n*-tého členu přičítáme k prvnímu členu diferenci $(n-1)$ krát.