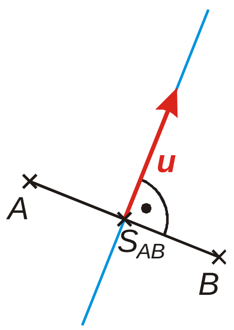
7.3.7 Přímková smršť

Předpoklady: 7306

Pedagogická poznámka: Hodina vznikla jako reakce na první průchod učebnicí v Třeboni se třídou 4.2011. Ukázalo se, že studenti mají problémy s přiřazením správného vektoru k různým druhům rovnic (parametrické vyjádření, obecná rovnice) v případech, kdy mají sestavovat rovnice více než jedné přímky.
Jde v podstatě o důsledek špatného (nekompletního) zápisu v sešitě a špatné orientace ve vlastním výpočtu. Je docela dobře možné, že u tříd, které se učí podle učebnice delší dobu, bude tato hodina zbytečná (dvě zmiňované dovednosti se u nich podstatně zlepšují), ale podobné problémy se objevovaly i u 4B2009 ve Strakonicích.
Jestli je hodina u Vaší třídy potřebná zjistíte snadno tím, že necháte studenty spočítat příklad 4. Pokud s ním má podstatná část třídy problémy, neměli byste hodinu vynechávat. Rozhodně nepomůže, když ji necháte studentům spočítat doma, protože Ti, kteří mají problémy, potřebují někoho, kdo je bude brzdit a nutit je, aby si ujasnili, jaký vektor pro kterou přímku potřebují, aby si kreslili obrázky, psali si indexy atd.
Při veškeré komunikaci se studenty je třeba pamatovat, že se učí orientaci v řešení příkladu (a ne sestavování rovnic), proto je třeba neřešit problém za ně, jen jim s ním pomáhat.

Př. 1: Jsou dány body $A[1;3]$, $B[-3;5]$. Najdi parametrické vyjádření osy úsečky *AB*.

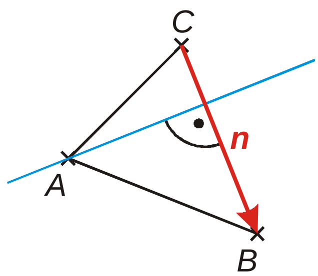


Osa úsečky *AB* – přímka kolmá na úsečku *AB*, procházející jejím středem.
Parametrické vyjádření:

- směrový vektor kolmý na úsečku *AB*: $B-A=(-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{osy}=(1;2)$
- střed úsečky *AB*: $S_{AB}[-1;4]$

parametrické vyjádření osy úsečky *AB*: $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=4+2t, t\in R \end{array}$.

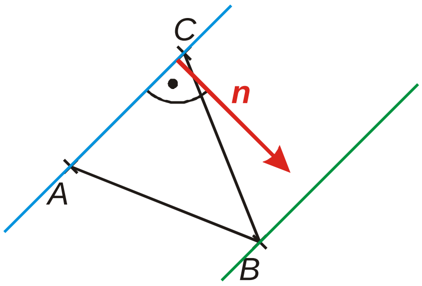
Př. 2: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;0]$. Najdi obecnou rovnici přímky, na které leží výška v_a.



Přímka, na které leží výška v_a: přímka kolmá na stranu *BC* procházející bodem *A*
normálový vektor výšky = vektor, kolmý na výšku $\Rightarrow$ vektor rovnoběžný se stranou *BC*
$C-B=(6;-5)=\boldsymbol{n}_v \Rightarrow$ rovnice $6x-5y+c=0$
Dosadíme bod $A[1;3]$: $6\cdot1-5\cdot3+c=0 \Rightarrow c=9$

Rovnice přímky, na které leží výška v_a: $6x-5y+9=0$

Př. 3: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;0]$. Najdi obecnou rovnici přímky *AC*. Nadi obecnou rovnici přímky, která prochází bodem *B* a je s přímkou *AC* rovnoběžná.



Přímka *AC*:

$C-A=(2;-3) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AC}=(3;2)$

$\Rightarrow$ rovnice $3x+2y+c=0$

Dosadíme bod $A[1;3]$: $3\cdot1+2\cdot3+c=0 \Rightarrow c=-9$

Rovnice přímky *AC*: $3x+2y-9=0$

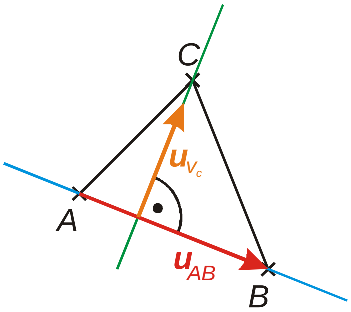
rovnoběžka s přímkou *AC* bodem *B*: stejný normálový vektor $\boldsymbol{n}_{AC}=(3;2)$

$\Rightarrow$ rovnice $3x+2y+c=0$

Dosadíme bod $A[-3;5]$: $3\cdot(-3)+2\cdot5+c=0 \Rightarrow c=-1$

Rovnice přímky rovnoběžné s *AC* procházející bodem *B*: $3x+2y-1=0$

Př. 4: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[2;0]$. Najdi parametrická vyjádření přímky *AB* a přímky, na které leží výška v_c. Urči souřadnice paty výšky v_c.



Přímka *AB*: $B-A=(-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB}=(-2;1)$

použijeme bod $A[1;3] \Rightarrow AB$: $\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=3+t; t\in R \end{array}$

Přímka, na které leží v_c je kolmá na *AB*: $\Rightarrow \boldsymbol{u}_{v_c}=(1;2)$

použijeme bod $C[2;0] \Rightarrow v_c$: $\begin{array}{l} x=2+s \\ y=2s; s\in R \end{array}$

Pata výšky je průsečíkem obou přímek $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:

$1-2t=2+s$

$3+t=2s \quad \Rightarrow t=2s-3$

Dosadíme do první rovnice: $1-2(2s-3)=2+s$

$1-4s+6=2+s$

$5=5s \Rightarrow s=1$

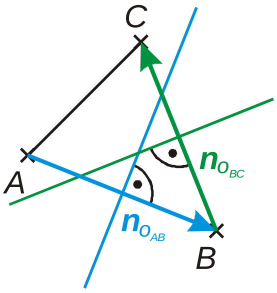
Dosazením do rovnice přímky, na které leží v_c určíme souřadnice bodu C_0:

$x=2+s=2+1=3$

$y=2s=2\cdot1=2$

Pata výšky má souřadnice $C_0[3;2]$.

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;1]$. Najdi obecné rovnice os dvou stran a jejich průsečík (střed kružnice opsané).



Osa strany: prochází středem strany a je na stranu kolmá $\Rightarrow$

Osa strany AB: $B-A=(-4;2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n}_{osa\,AB}=(-2;1)$

rovnice $-2x+y+c=0$

Dosadíme bod $S_{AB}[-1;4]$: $-2\cdot(-1)+4+c=0 \;\Rightarrow\; c=-6$

Osa strany AB: $-2x+y-6=0$

Osa strany BC: $C-B=(6;-4) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n}_{osa\,BC}=(3;-2)$

rovnice $3x-2y+c=0$

Dosadíme bod $S_{BC}[0;3]$: $3\cdot 0-2\cdot 3+c=0 \;\Rightarrow\; c=6$

Osa strany BC: $3x-2y+6=0$

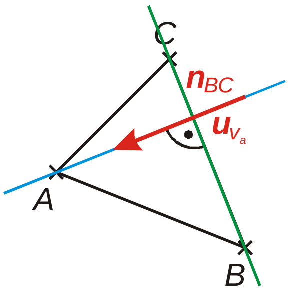
Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned}-2x+y-6&=0 \quad /\cdot 2\\ 3x-2y+6&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4x+2y-12&=0\\ 3x-2y+6&=0\\ \hline -x-6=0 \;\Rightarrow\; x&=-6\end{aligned}$$
sečteme rovnice

y-ovou souřadnici spočteme dosazením do rovnice jedné z os: $-2(-6)+y-6=0 \;\Rightarrow\; y=-6$

Střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží v bodě $S[-6;-6]$.

Př. 6: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[0;-4]$. Najdi obecnou rovnici přímky BC a parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_a. Najdi průsečík obou přímek (patu výšky v_a).



Přímka BC: $C-B=(3;-9) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n}_{BC}=(3;1)$

rovnice $3x+y+c=0$

Dosadíme bod $C[0;-4]$: $3\cdot 0+(-4)+c=0 \;\Rightarrow\; c=4$

Přímka BC: $3x+y+4=0$

Přímka, na které leží v_a: je kolmá na přímku BC $\Rightarrow$ její směrový vektor je rovnoběžný s normálovým vektorem přímky BC:
$\boldsymbol{u}_{v_a}=\boldsymbol{n}_{BC}=(3;1)$, prochází bodem $A[1;3]$

přímka, na které leží v_a:
$$\begin{aligned}x&=1+3t\\ y&=3+t,\, t\in R\end{aligned}$$

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned}3x+y+4&=0\\ x&=1+3t\\ y&=3+t\end{aligned}$$

Z druhé a třetí rovnice dosadíme do první: $3(1+3t)+(3+t)+4=0$

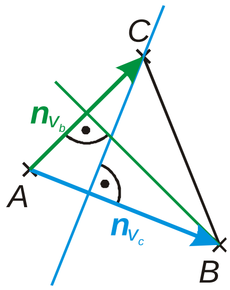
$3+9t+3+t+4=0$

$10t=-10 \;\Rightarrow\; t=-1$

Dopočteme souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= 1+3t = 1+3\cdot(-1) = -2 \\ y &= 3+t = 3+(-1) = 2 \end{aligned}$

Pata výšky v_a se nachází v bodě $A_0[-2;2]$.

Př. 7: Je dán trojúhelník ABC, $A[3;1]$, $B[-6;4]$, $C[-2;-4]$. Najdi obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky v_b a v_c. Urči jejich průsečík (ortocentrum trojúhelníku). Ověř, že tímto bodem prochází i přímka, na které leží výška v_a.



Přímka, na které leží výška v_c:

Přímka je kolmá na stranu AB: $B-A=(-9;3) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_c}=(-3;1)$

rovnice $-3x+y+c=0$

Dosadíme bod $C[-2;-4]$: $-3\cdot(-2)+(-4)+c=0 \Rightarrow c=-2$

Přímka, na které leží výška v_c: $-3x+y-2=0$

Přímka, na které leží výška v_b:

Přímka je kolmá na stranu AC: $C-A=(-5;-5) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_b}=(1;1)$

rovnice $x+y+c=0$

Dosadíme bod $B[-6;4]$: $(-6)+4+c=0 \Rightarrow c=2$

Přímka, na které leží výška v_b: $x+y+2=0$

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{aligned} -3x+y-2&=0 \\ x+y+2&=0 \end{aligned}$ rovnice odečteme

$-4x-4=0 \Rightarrow x=-1$

y-ovou souřadnici spočteme dosazením do rovnice jedné z výšek: $-1+y+2=0 \Rightarrow y=-1$

Ortocentrum trojúhelníku ABC leží v bodě $O[-1;-1]$.

Přímka, na které leží výška v_a:

Přímka je kolmá na stranu BC: $C-B=(4;-8) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_a}=(1;-2)$

rovnice $x-2y+c=0$

Dosadíme bod $A[3;1]$: $3-2\cdot1+c=0 \Rightarrow c=-1$

Přímka, na které leží výška v_a: $3x-2y-1=0$

Dosadíme bod $O[-1;-1]$: $3x-2y-1=3(-1)-2(-1)-1=0$ - přímka prochází bodem O.

Př. 8: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;1]$. Najdi obecnou rovnici střední příčky $S_{AC}S_{BC}$. Ověř, že je rovnoběžná se stranou AB.

Obecná rovnice přímky $S_{AC}S_{BC}$: $S_{BC}-S_{AC}=[0;3]-[2;2]=(-2;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;2)$

rovnice: $x+2y+c=0$

Dosadíme bod $S_{BC}[0;3]$: $0+2\cdot3+c=0 \Rightarrow c=-6$

Rovnice střední příčky $S_{AC}S_{BC}$: $x+2y-6=0$.

Směrový vektor přímky $(-2;1)$ je násobek vektoru $B - A = (-4;2)$ $\Rightarrow$ střední příčka je rovnoběžná se stranou AB.

Shrnutí: Při sestavování rovnice přímky musíme používat vektory, které patří k této přímce.