7.2.13 Vektorový součin II

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

šipka znamená součin čísel, které spojuje, šipky dolů jsou kladné, šipky nahoru záporné $\Rightarrow$

$a \times b = (a_2 b_3 - b_2 a_3; a_3 b_1 - b_3 a_1; a_1 b_2 - b_1 a_2)$

Spočteme vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vektorů $\boldsymbol{a} = (1; 2; -3)$ a $\boldsymbol{b} = (2; -3; 0)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

$a \times b = (2 \cdot 0 - (-3)(-3); (-3)2 - 0 \cdot 1; 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2) = (-9; -6; 1)$

Př. 1: Vypočti vektorový součin vektorů:
a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$ b) $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$ $\boldsymbol{b} = (-2; 1; 3)$
c) $\boldsymbol{a} = (-2; 3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (4; -6; -2)$
Výsledky zkontroluj pomocí vlastností vektorového součinu.

a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1 \cdot 3 - 3 \cdot 2; 3 \cdot 1 - (-2)3; (-2)2 - 1 \cdot 1) = (-3; 9; -5)$

b) $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$ $\boldsymbol{b} = (-2; 1; 3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1; 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 3; 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) = (3; -9; 5)$

c) $\boldsymbol{a} = (-2; 3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (4; -6; -2)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & -6 \end{array}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6); 1 \cdot 4 - (-2)(-2); (-2)(-6) - 3 \cdot 4) = (0; 0; 0)$

Př. 2: Zapiš všechny vektory, kterou jsou kolmé zároveň na vektor $\boldsymbol{u} = (2; 0; 1)$ a $\boldsymbol{v} = (-1; 1; 5)$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}$$

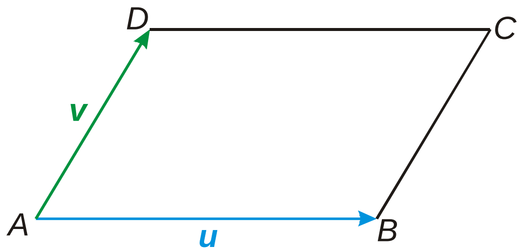
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (0 \cdot 5 - 1 \cdot 1; 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 2; 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = (-1; -11; 2) \Rightarrow k(-1; -11; 2)$, kde $k \in R - \{0\}$.

Př. 3: Najdi vektor $\boldsymbol{c}$ tak, aby byl kolmý na vektory $\boldsymbol{a} = (1; 0; 1)$ a $\boldsymbol{b} = (1; 2; 2)$ a platilo $|\boldsymbol{c}| = 6$.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0 \cdot 2 - 2 \cdot 1; 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1; 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = (-2; -1; 2)$ $\quad |\boldsymbol{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

- $\boldsymbol{c}_1 = 2 \cdot \boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{c}_1 = 2(-2; -1; 2) = (-4; -2; 4)$
- $\boldsymbol{c}_2 = (-2) \cdot \boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{c}_2 = (-2)(-2; -1; 2) = (4; 2; -4)$

Př. 4: Urči obsah rovnoběžníku *ABCD* pokud platí: $A[-1;-2;1]$, $B[2;0;2]$, $C[1;1;-1]$.



Nejdříve určíme souřadnice vektorů:

$\boldsymbol{u} = B - A = (3;2;1)$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = C - B = (-1;1;-3)$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (2\cdot(-3)-1\cdot1;1\cdot(-1)-(-3)\cdot3;3\cdot1-(-1)\cdot2) = (-7;8;5)$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{138} \doteq 11,75$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci určovat plochu z obrácené strany rovnosti $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha$, tedy určením velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a úhlu α.

Př. 5: Urči obsah trojúhelníku *ABC* pokud platí: $A[-2;-2]$, $B[3;-1]$, $C[1;4]$

- vektorový součin určuje obsah rovnoběžníku, pro trojúhelník platí: $S = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ spočteme vektorový součin a jeho velikost vydělíme dvěma.
- vektorový součin je určen pouze pro vektory v prostoru, příklad je však zadán v rovině (spočítat jít musí, protože smysl má) $\Rightarrow$ přidáme k souřadnicím bodů třetí souřadnici (vždy stejnou, nejlépe nulovou).

Body v prostoru: $A[-2;-2;0]$, $B[3;-1;0]$, $C[1;4;0]$

Vektory: $\boldsymbol{b} = B - A = (5;1;0)$, $\boldsymbol{c} = C - A = (3;6;0)$

Vektorový součin: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (1\cdot0-6\cdot0;0\cdot3-0\cdot5;5\cdot6-3\cdot1) = (0;0;27)$

Velikost vektorového součinu: $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 27^2} = 27$

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$.

Trojúhelník má obsah 13,5.

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 46 b)
strana 103/cvičení 47 a)
strana 103/cvičení 48 c)
strana 103/cvičení 50
strana 103/cvičení 51
strana 103/cvičení 53