

7.2.7 Skalární součin I

Vzpomínka: Velikost vektoru $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2$$

Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$?

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

⇒ **Velký rozdíl oproti násobení dvou čísel. Vynásobením dvou čísel získáme opět číslo, ale vynásobením dvou vektorů, získáváme číslo, tedy něco úplně jiného.**

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Př. 1: Urči skalární součin vektorů $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

a) $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$ a $\mathbf{v} = (3; 3; 3)$

b) $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$ a $\mathbf{v} = (3; 3; -3)$

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; 3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 + 6 + 9 = 18$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; -3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) = 3 + 6 - 9 = 0$

Př. 2: U každé z následujících dvojic vektorů vypočti skalární součin a načrtni obrázek. Pro všechny vektory vol umístění v počátku soustavy souřadnic.

a) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (3; 4)$

b) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (0; 5)$

c) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (-3; 4)$

a) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (3; 4)$

b) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (0; 5)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4; 3) \cdot (3; 4) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4; 3) \cdot (0; 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

c) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (-3; 4)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4; 3) \cdot (-3; 4) = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$$

Všechny násobené vektory měly stejnou velikost, přesto se jejich skalární násobky liší. ⇒ Zřejmě skalární součin kromě velikosti vektorů závisí i na úhlu, který vektory svírají. O úhlu, který svírají vektory jsme ještě nemluvili. Co to vlastně je?

Př. 3: Úhel, který svírají dva vektory je zaveden takto:

“Mají-li dva vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} umístění OU , OV , nazývá se velikost konvexního úhlu UOV úhel φ vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} . Jsou-li přímky OU , OV navzájem kolmé, říkáme, že i vektory OU , OV jsou navzájem kolmé.“

Nakresli obrázek zachycující situaci popisovanou v definici. Jakých hodnot může dosáhnout úhel, který svírají dva vektory? Jakých hodnot může dosáhnout odchylka dvou přímek?

pro úhel φ dvou vektorů platí: $0 \leq \varphi \leq \pi$

pro odchylku α přímek platí: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Př. 4: Jsou dány vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} takové, že platí: $|\mathbf{v}| = 2|\mathbf{u}|$. Vyznač možnou polohu těchto vektorů pokud pro úhel φ , který svírají platí:

- a) $\varphi = 0$ b) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d) $\varphi = \pi$

Př. 5: Jsou dány dva vektory \mathbf{u} (o velikosti $|\mathbf{u}|$) a \mathbf{v} (o velikosti $|\mathbf{v}|$), které svírají úhel φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$). Urči souřadnice těchto vektorů v kartézské soustavě, jejíž osa x je

rovnoběžná se směrem vektoru \mathbf{u} .

Nakresli náčrtek situace, umístění obou vektorů vol tak, aby jejich počáteční body ležely v počátku soustavy souřadnic. Pomocí velikostí obou vektorů $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ a velikosti úhlu φ vyjádři jejich souřadnice. Poté odvoď vzorec pro význam skalárního součinu.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (|\mathbf{u}|; 0) \cdot (|\mathbf{v}| \cos \varphi; |\mathbf{v}| \sin \varphi) = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi + 0 \cdot |\mathbf{v}| \sin \varphi$$

Pro skalární součin dvou vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} platí: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$

Pedagogická poznámka: Studenti většinou nakreslí obrázek, ale určování souřadnic jim nejde. Souřadnice vektoru \mathbf{u} jim proto ukazují docela brzo.

Př. 6: Rozhodni, kdy je skalární součin vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} roven nule.

ze vzorce $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$ vyplývá, že skalární součin vektorů je nulový:

- pokud je jeden z vektorů nulový (má nulovou délku)
- pokud jsou na sebe vektory kolmé.

Př. 7: Petáková:
strana 101/cvičení 24