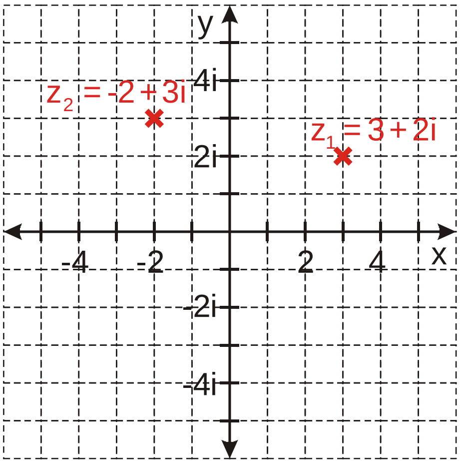
6.2.6 Komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině

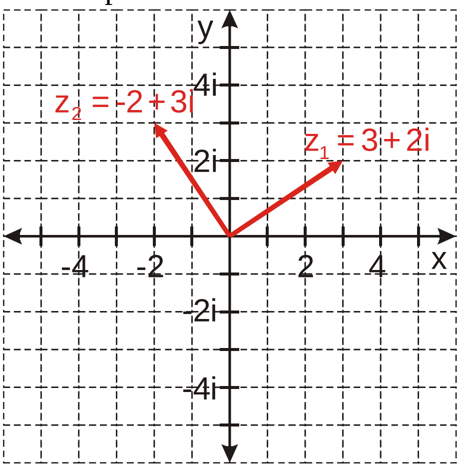
Předpoklady: 3511, 6201

Př. 1: Zobraz do Gaussovy roviny komplexní čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$.



Komplexní čísla nemusíme zobrazovat pouze jako body v rovině. Uspořádaná dvojice čísel $[3;2]$ nepředstavuje pouze bod v rovině, ale také vektor s počátkem v počátku soustavy souřadnic a s koncovým bodem $[3;2]$, tedy vektor $(3;2)$.

$\Rightarrow$ komplexní čísla může zobrazovat v Gaussově rovině také jako vektory.



Postřeh: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je zároveň i velikostí vektoru.

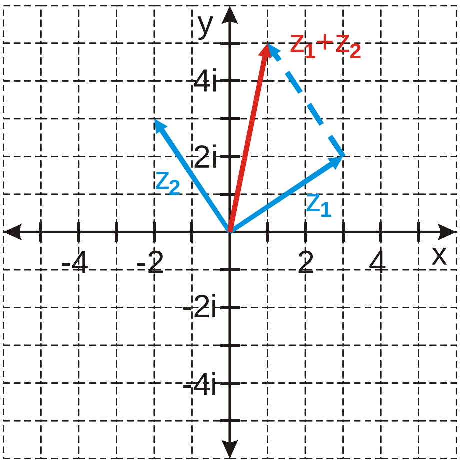
Pokud to nemá nějaké výhody, je to zbytečná práce.

Co umožňují vektory oproti bodům?

S vektory je možné provádět početní operace – sčítání a odčítání.

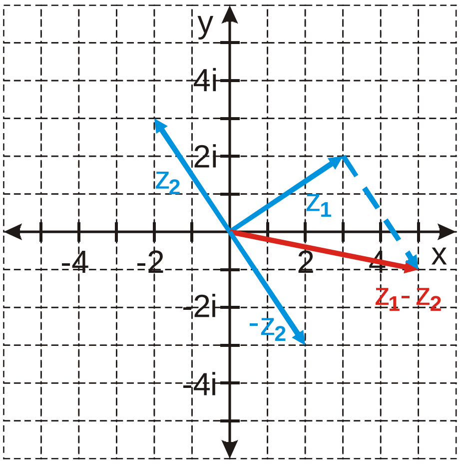
Př. 2: Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$. Zobraz je v Gaussově rovině jako vektory a poté graficky spočti: a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
Výsledky ověř graficky.

a) $z_1 + z_2$



Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 + z_2 = 1 + 5i$
Ověříme početně:
$z_1 + z_2 = 3 + 2i + (-2 + 3i) = 1 + 5i$

b) $z_1 - z_2$

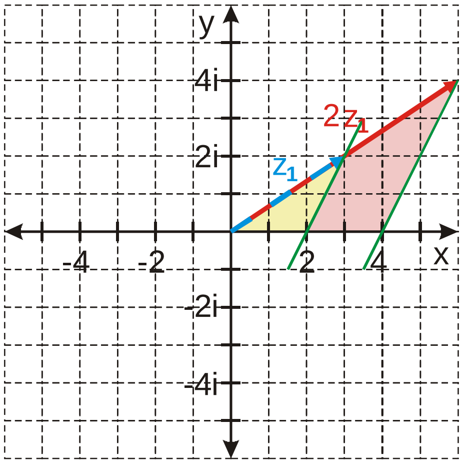


Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 - z_2 = 5 - i$
Ověříme početně:
$z_1 - z_2 = 3 + 2i - (-2 + 3i) = 5 + i$

Co dál?
Vektory můžeme násobit reálným číslem $\Rightarrow$ změníme jejich délku, někdy i obrátíme směr.

Př. 3: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3 + 2i$. Graficky urči $2z_1$. Výsledek ověř výpočtem.

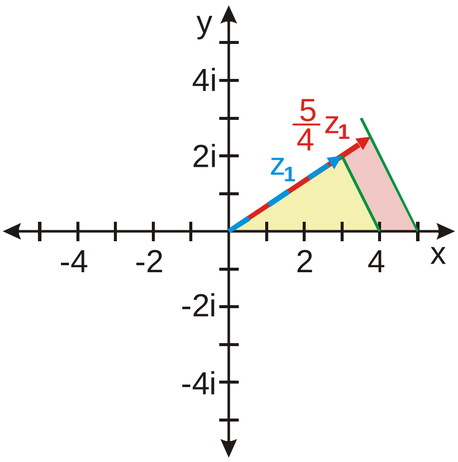
$2z_1$ - musíme dvakrát zvětši velikost vektoru $\Rightarrow$ pomocí podobnosti trojúhelníků

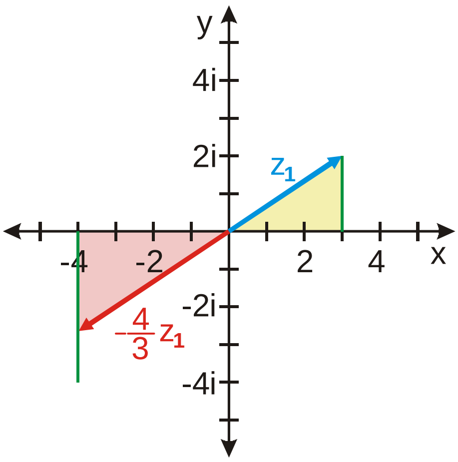


Př. 4: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3 + 2i$. Graficky urči čísla:

a) $\frac{5}{4} z_1$ b) $-\frac{4}{3} z_1$

a) $\frac{5}{4} z_1$ b) $-\frac{4}{3} z_1$





Zkusíme ještě násobení.
Nejdřív pro jednoduchost libovolné komplexní číslo z a komplexní jednotku w.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$

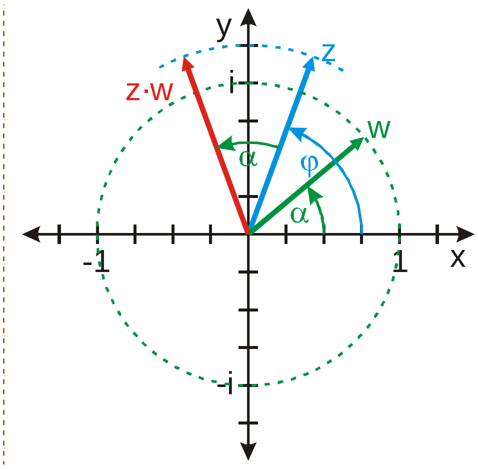
$z \cdot w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\left[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\right]$

Porovnáváme: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z \cdot w = r\left[\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\right]$

$\Rightarrow$ obě čísla mají stejnou absolutní hodnotu (a jejich vektory stejnou délku), číslo $z \cdot w$ je pootočené o úhel α

Př. 5: Na obrázku Gaussovy rodiny je pomocí vektorů znázorněno komplexní číslo z a komplexní jednotka w. Znázorni do obrázku komplexní číslo $z \cdot w$.

Stačí otočit vektor čísla z o úhel α.



Konečně se dostáváme k násobení libovolné dvojice komplexních čísel. Nejdřív zase v goniometrickém tvaru:

$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ $\qquad$ $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$

$z = z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]$

S úhlem už to víme: vybereme jedno z komplexních čísel a otočím ho o argument druhého, ale co velikosti?

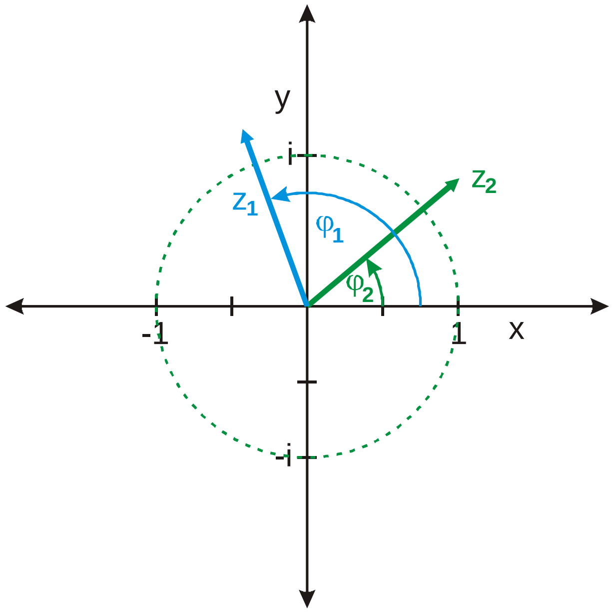
$r = r_1 r_2 \Rightarrow$ to už jsme dělali v geometrii

$r = r_1 r_2 \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{r_2}{1}$ - to už je podobnost trojúhelníků

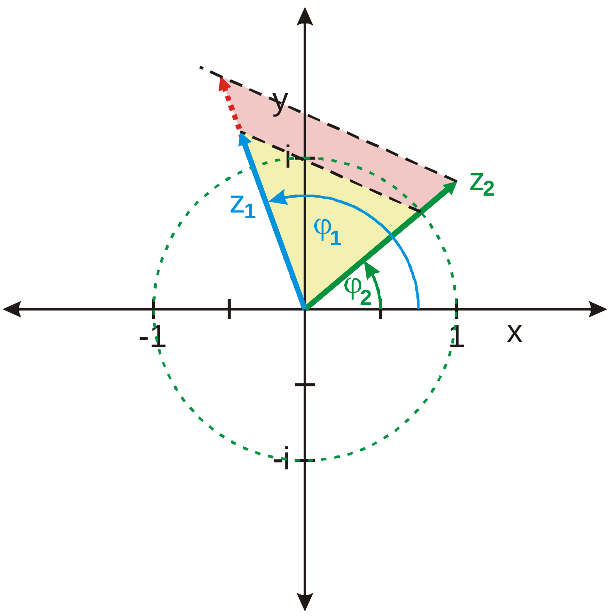
$\Rightarrow$ dva kroky:

- zjištění velikosti výsledného vektoru
- otočení do výsledného úhlu

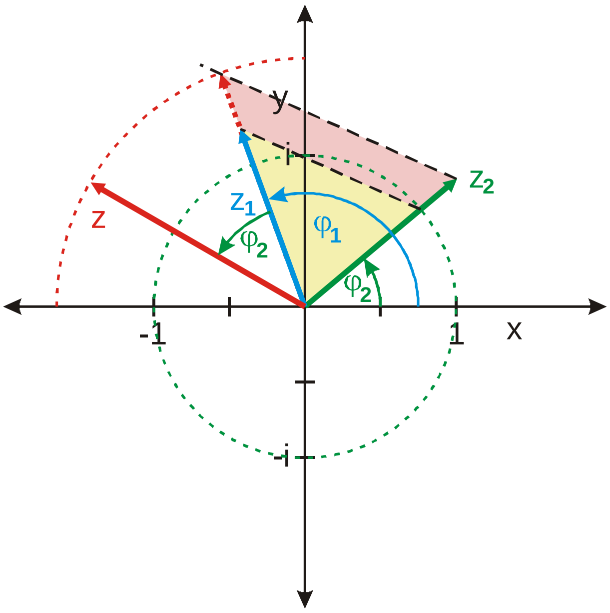
Př. 6: Na obrázku Gaussovy rodiny jsou pomocí vektorů znázorněna komplexní čísla z_1 a z_2. Urči graficky číslo $z = z_1 z_2$.



Nejdříve určíme velikost výsledného vektoru: $r = r_1 r_2 \Rightarrow \frac{r}{r_2} = \frac{r_1}{1}$ - podobnost trojúhelníků



Zbývá zvětšený vektor otočit o úhel φ_2



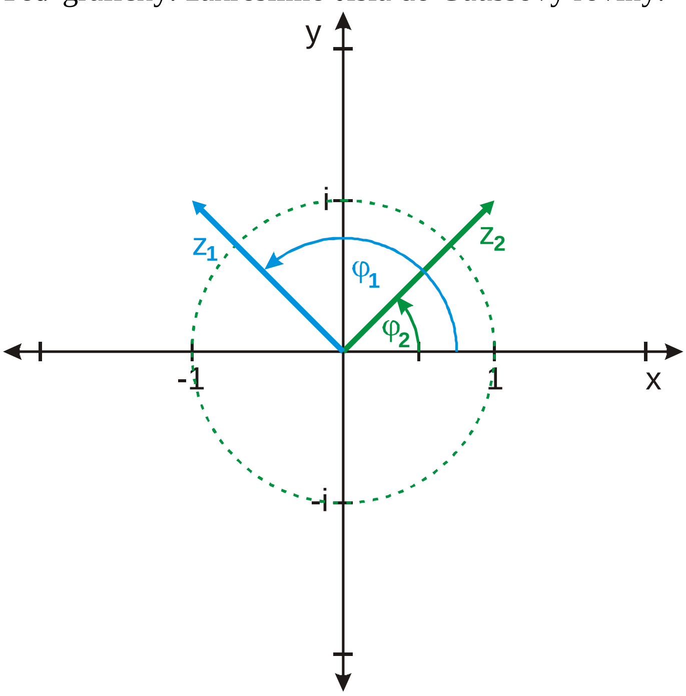
Pedagogická poznámka: Dost studentů nebude schopno celý příklad samostatně vyřešit. Pro ně příklad pomocí tabule rozfázujeme na dvě části.

Př. 7: Urči graficky i početně součin $(-1+i)(1+i)$.

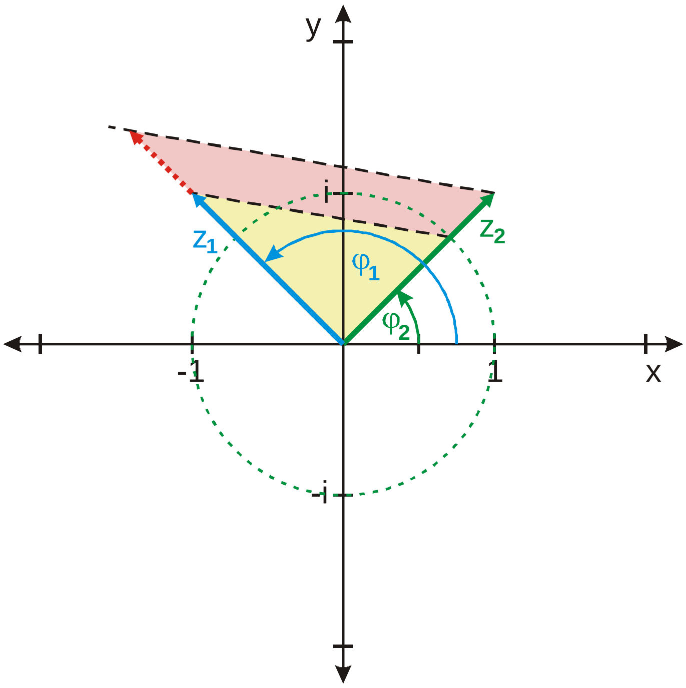
Početně: $(-1+i)(1+i) = -1-i+i+i^2 = -2$

Označíme čísla: $z_1 = -1+i$, $z_2 = 1+i$

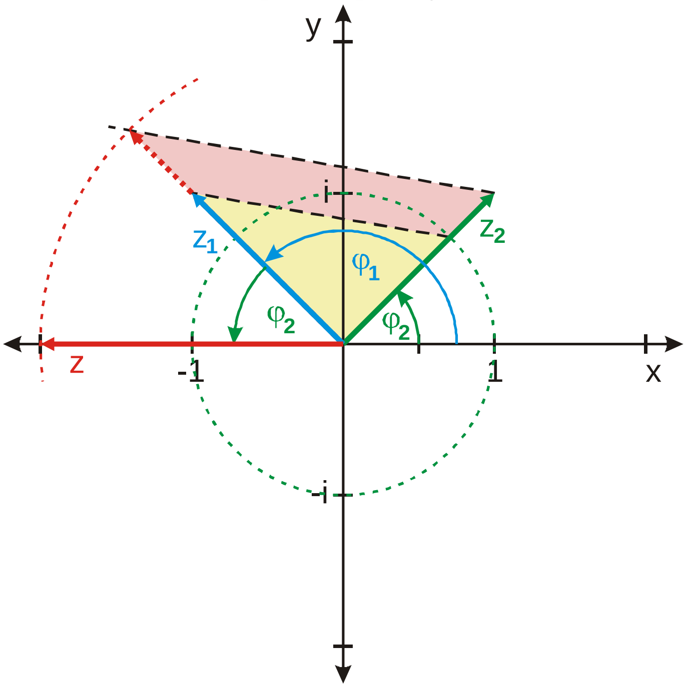
Teď graficky: zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délky výsledného vektoru.



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s početním.

Př. 8: Urči graficky i početně podíl: $\frac{-1+i}{1+i}$.

Početně: $\frac{-1+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-1+i+i-i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$

Označíme čísla: $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$

Teď graficky: nejdřív provedeme dělení v goniometrickém tvaru:

$z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$ $\qquad$ $z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$

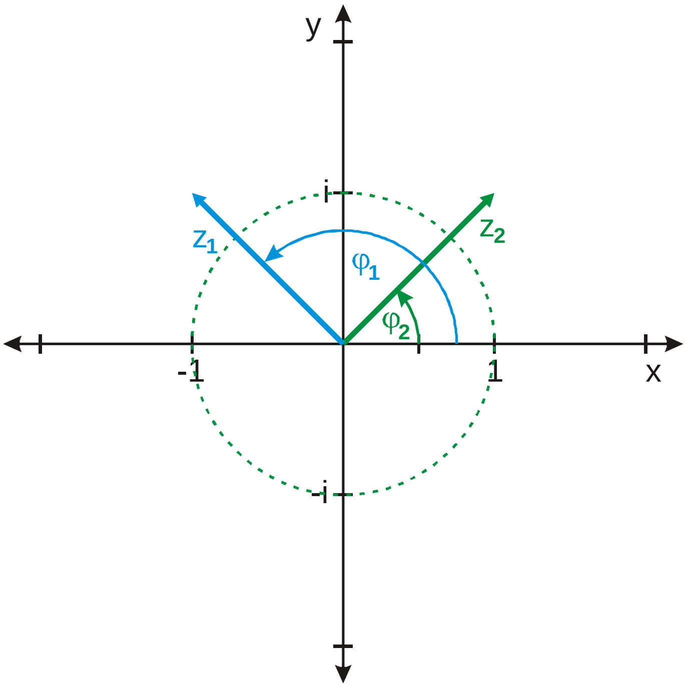
$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$

S úhlem pracujeme podobně jako u násobení, ale úhly odečítáme.

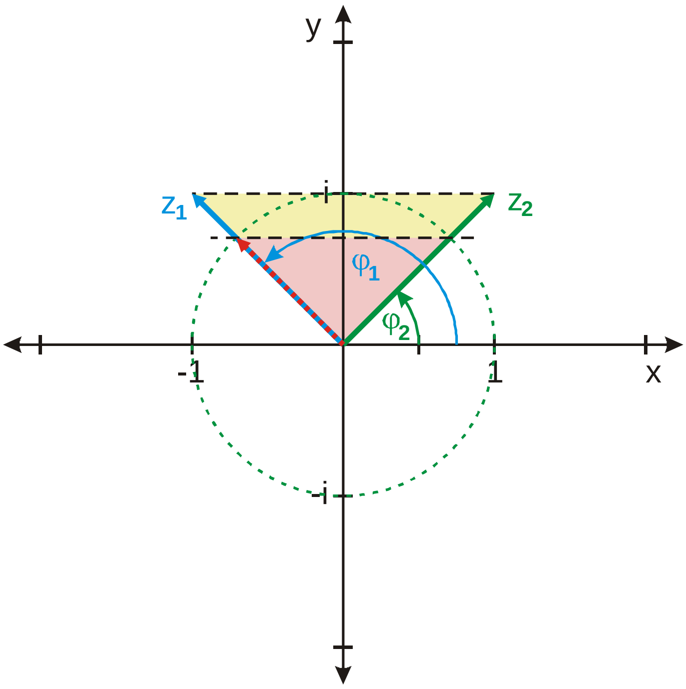
Velikost určíme ze vzorce: $r = r_1 r_2 \;\Rightarrow$ to už jsme dělali v geometrii

$r = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$ - podobnost trojúhelníků

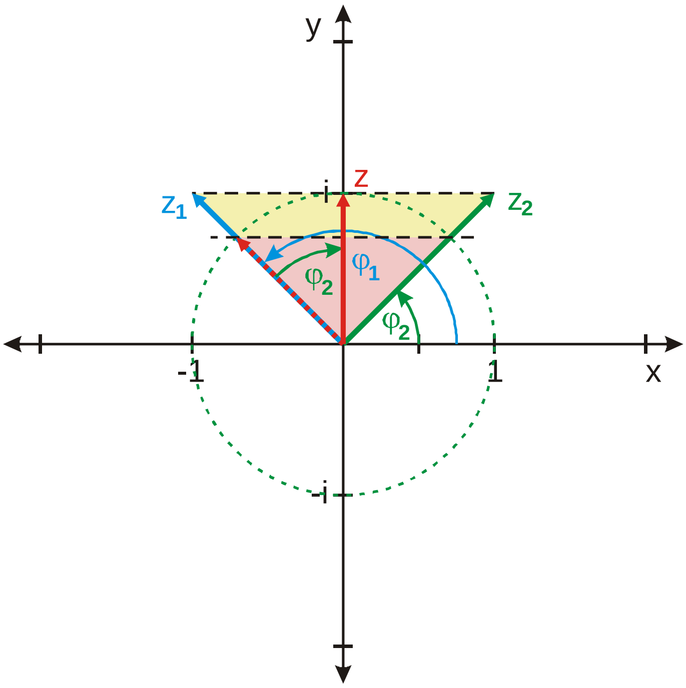
Zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délku výsledného vektoru. $r = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s početním.

Př. 9: Petáková:
strana 135/cvičení 15 c)
strana 135/cvičení 16 a) b)
strana 135/cvičení 17 b) c)

Shrnutí: