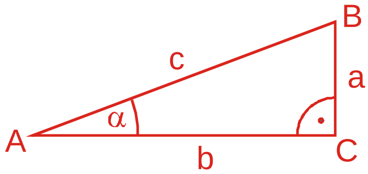
4.2.15 Funkce kotangens

Předpoklady: 4214

Pedagogická poznámka: Pokud nemáte čas, doporučuji nechat tuto hodinu studentům na domácí práci. Nedá se na tom nic zkazit a v budoucnu to není nikde příliš potřeba.



Tangens a kotangens jsou definovány v pravoúhlém trojúhelníku:

- $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{protilehlá}{přilehlá}$,
- $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{přilehlá}{protilehlá}$.

Definici kotangens všechna $x \in R$ nemůže vycházet z pravoúhlého trojúhelníku.

Máme definovány funkce $\sin x$ a $\cos x$ pro všechna $x \in R$ a vzorec $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\Rightarrow$ použijeme jej jako definiční vztah:

Funkcí kotangens se nazývá funkce daná vztahem $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Tuto funkci značíme $\mathrm{cotg}\, x$.

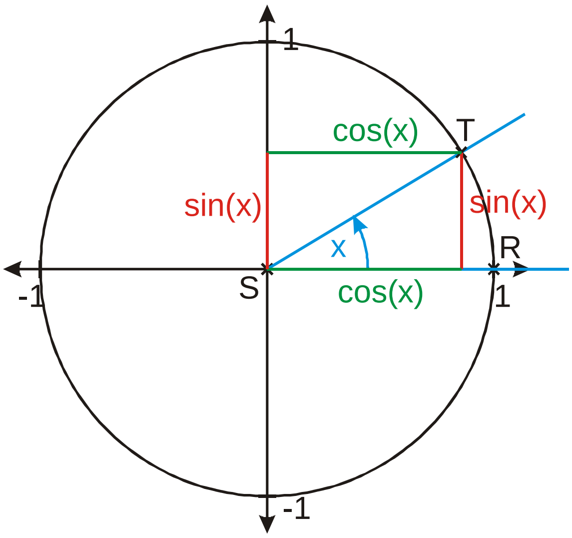
Poznámka: Většina světa používá pro funkci kotangens označení $\cot x$.

Př. 1: Urči definiční obor funkce $y = \mathrm{cotg}\, x$.

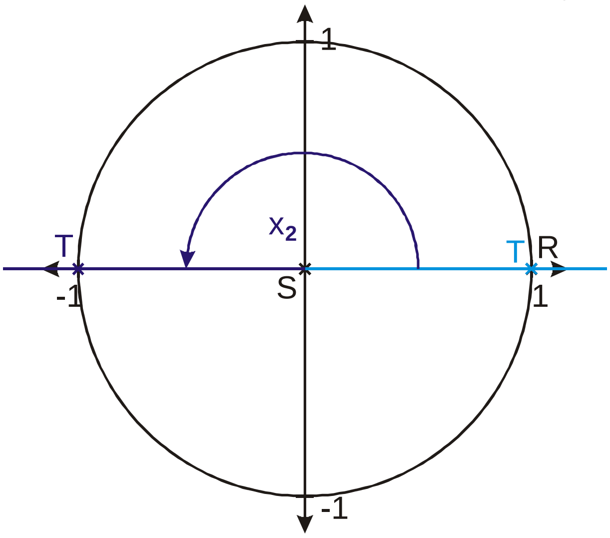
Vyjdeme z definičního vztahu $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Ve vztahu se dělí $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou, další problémové operace se v ní nevyskytují, obě funkce $\sin x$ i $\cos x$ jsou definovány pro všechna $x \in R$.

Kdy je $\sin x = 0$?

Hodnota funkce $y = \sin x$ je dána jako y-ová souřadnice bodu na jednotkové kružnici.

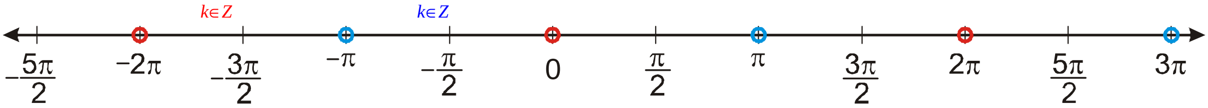


Z obrázku je vidět, bod *T* bude mít nulovou *y*-vou souřadnici, pokud bude ležet na ose *x*.



V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ jde o čísla $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$.

Pokud zohledníme, že funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π. Jde o dvě množiny čísel: $\bigcup_{k\in Z}\{0 + k\cdot 2\pi\}$ a $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + k\cdot 2\pi\}$.

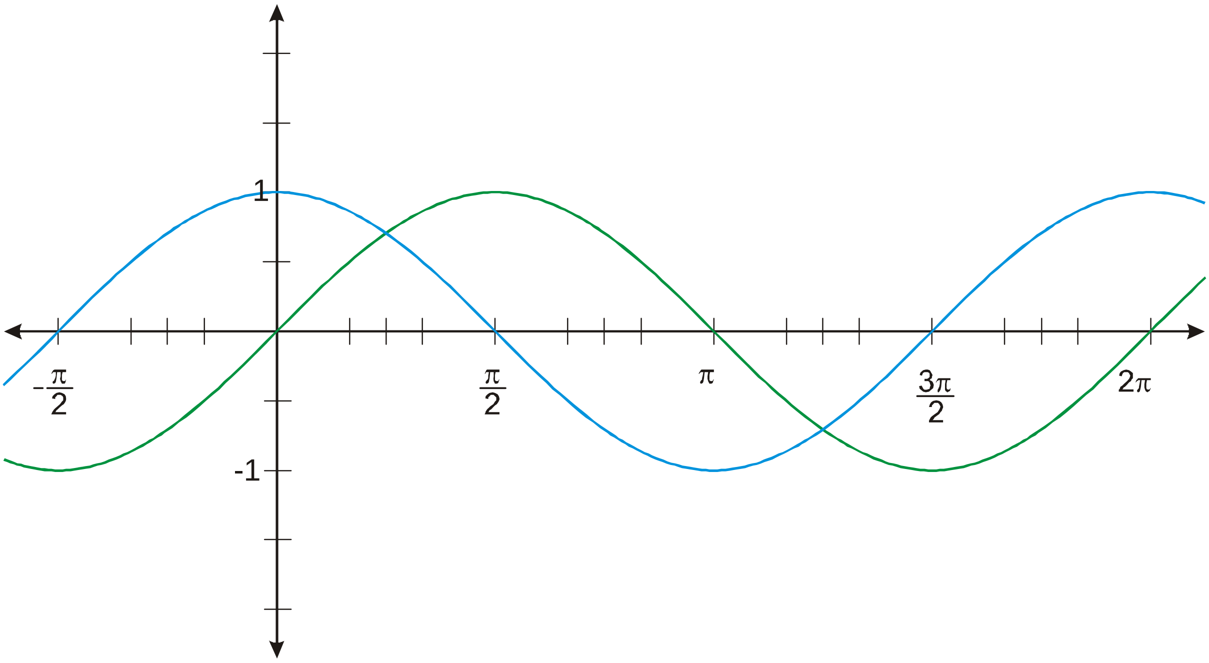


Stejně jako v předchozí kapitole jsou jednotlivá vyřazená čísla *x* rovnoměrně rozmístěna po ose a jsou od sebe vzdálena o násobky π. Všechna vyřazená čísla bychom získali tak, že bychom se z bodu 0 posouvali o násobky π.

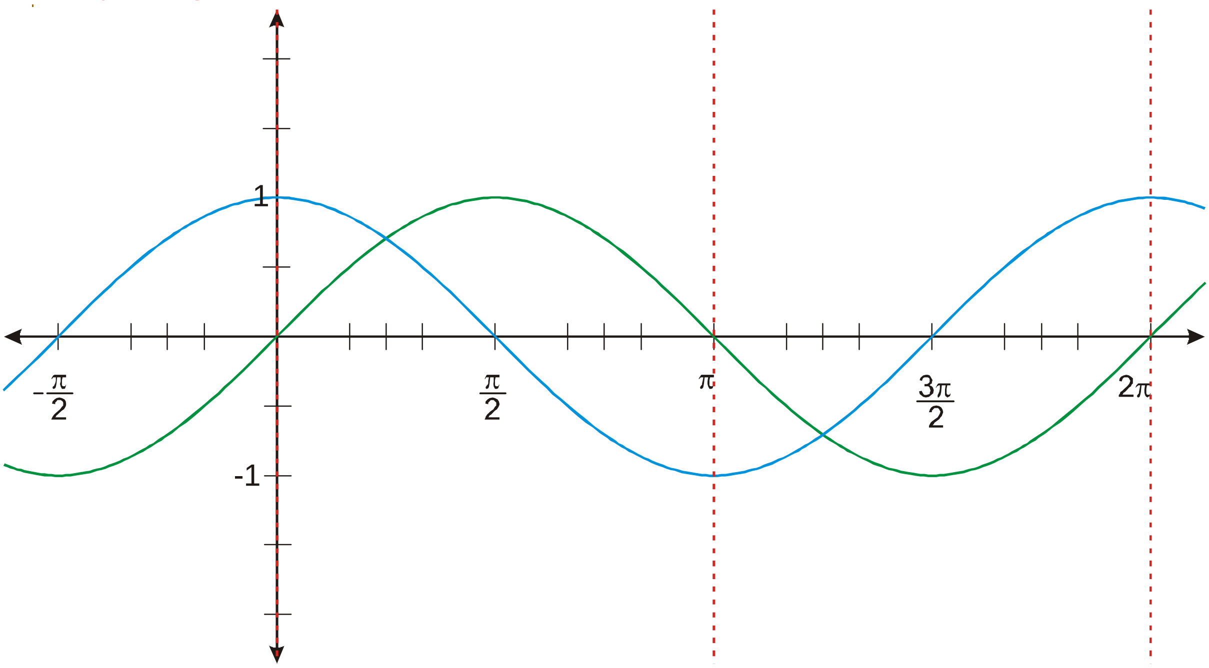
$$\bigcup_{k\in Z}\{0 + k\cdot 2\pi\} + \bigcup_{k\in Z}\{\pi + k\cdot 2\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$$

$\Rightarrow$ Funkce kotangens je definována pro všechna čísla $R - \bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$. Pomocí nakreslených grafu odhadni tvar grafu funkce $y = \operatorname{cotg} x$.



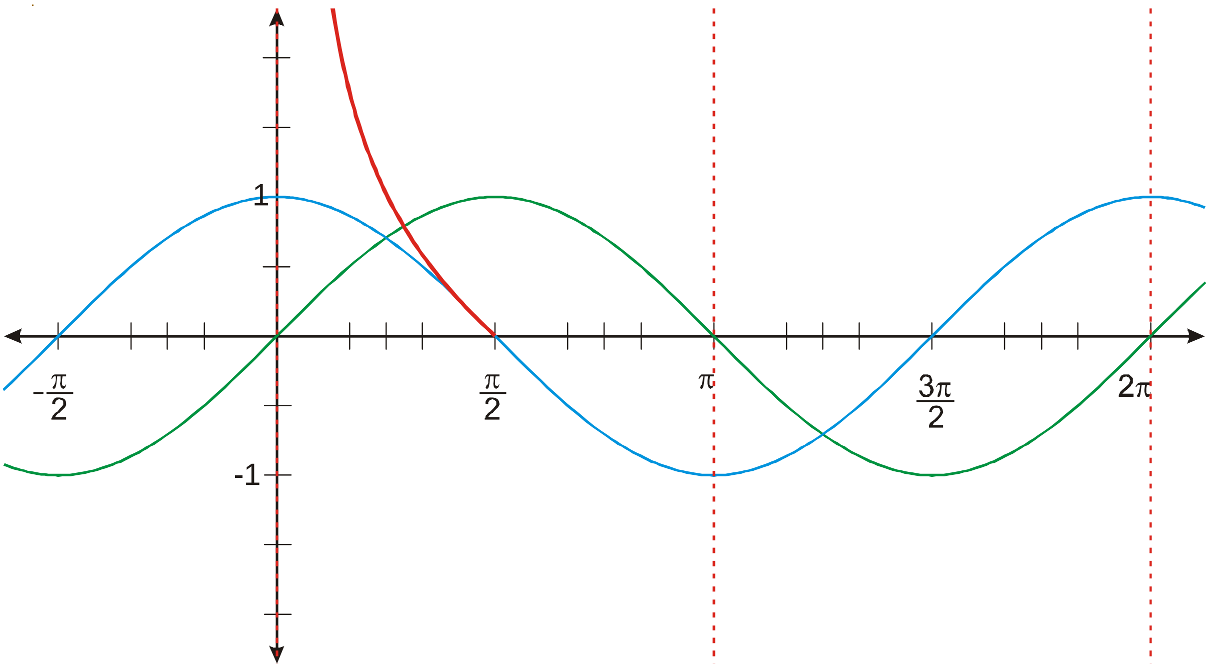
- V bodech, ve kterých graf funkce $y = \sin x$ protíná osu x, nebude mít funkce $y = \operatorname{cotg} x$ žádnou hodnotu (nulou nelze dělit).



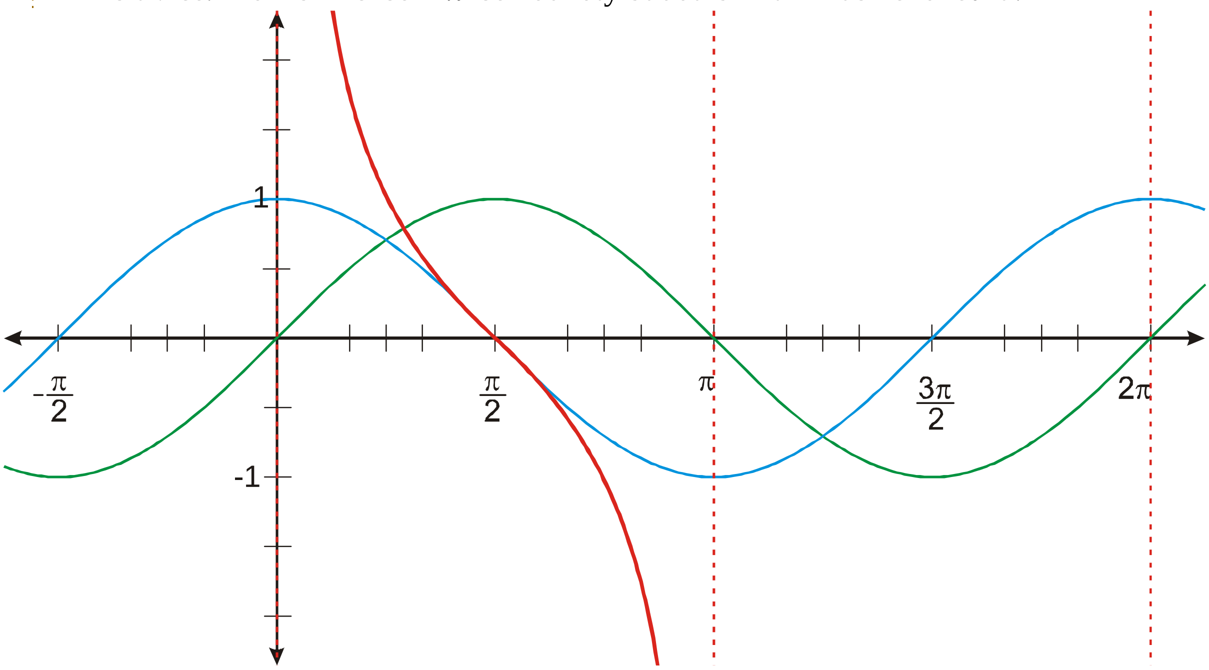
Funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je definována jako $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ podíl dvou funkcí. Modrou křivku budeme v grafu dělit zelenou.

- V bodě $x = \frac{\pi}{2}$ je hodnota funkce $y = \operatorname{cotg} x$ rovna $\frac{0}{1} = 0$.
- V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ dělíme hodnoty $\cos x$, nejdříve velmi malými čísly, poté čísly, která se zvětšují k jedničce. Pro x blížící se 0 budeme dělit velmi malými čísly. Pro x

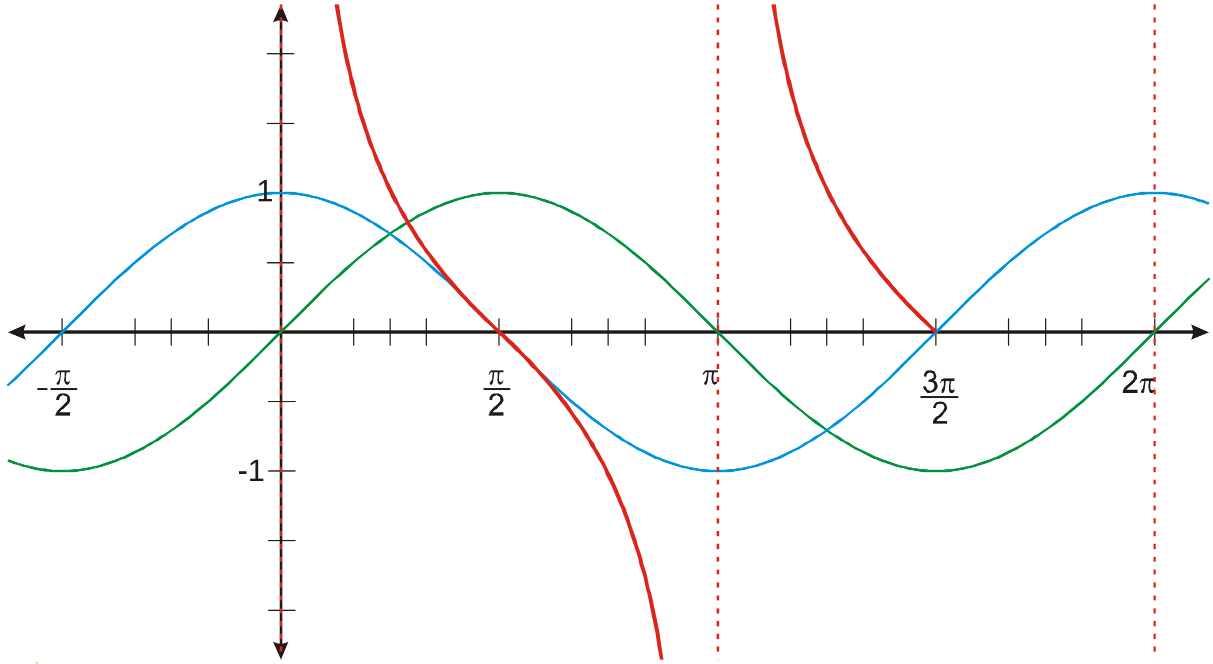
blížící se k 0 se hodnoty budou blížit nekonečnu, pro x blížící se k $\frac{\pi}{2}$ se hodnoty budou blížit k nule.



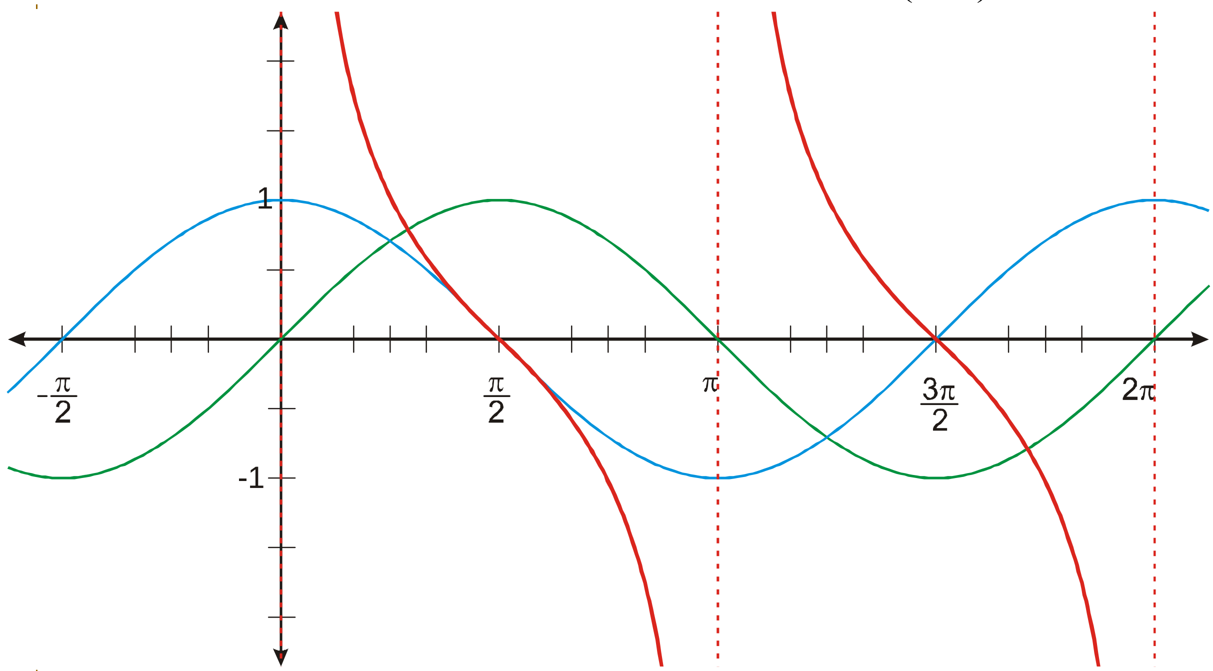
- Zkoumáme interval $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Dělíme hodnoty $\cos x$ (záporná čísla), nejdříve čísly blízkými 1, poté čísly, která se zmenšují. Pro x blížící se π budeme dělit velmi malými kladnými čísly. Získané hodnoty budou vždy menší než hodnoty $\sin x$ (jsou to záporná čísla, jejich absolutní hodnota naopak poroste), pro menší čísla x se budou lišit více. Pro x blížící se k π se hodnoty budou blížit mínus nekonečnu.



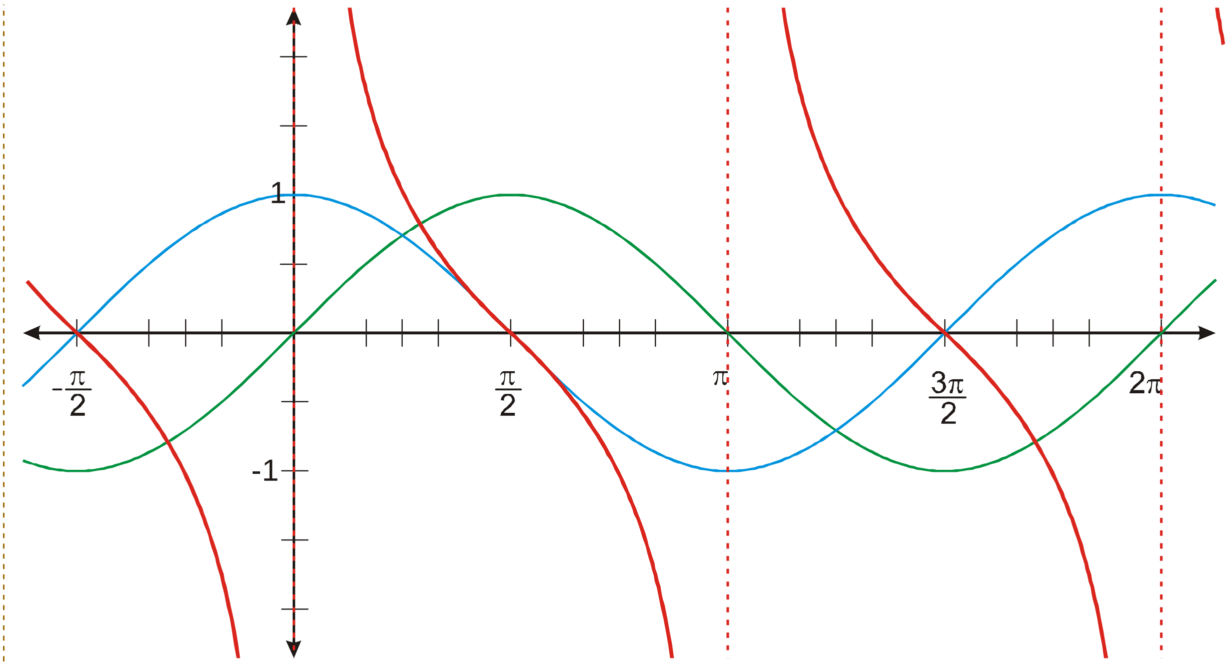
- V intervalu $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ nejdříve dělíme hodnoty $\cos x$ blížící se -1 zápornými čísly, která se zmenšují od nuly k –1. Hodnoty podílu se na začátku intervalu blíží k nekonečnu, pak se postupně zmenšují, až se dostanou k nule. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.



- V intervalu $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ dělíme kladnou hodnotu $\cos x$ záporným číslem $\sin x$, výsledek tedy bude záporný. Hodnoty $\cos x$ se zvětšují od 0 k 1. Hodnota $\sin x$ se zvětšuje od – 1 k nule. Hodnota podílu se na začátku intervalu blíží k nule, pak postupně klesá k mínus nekonečnu. Průběh funkce je podobný jako v intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.



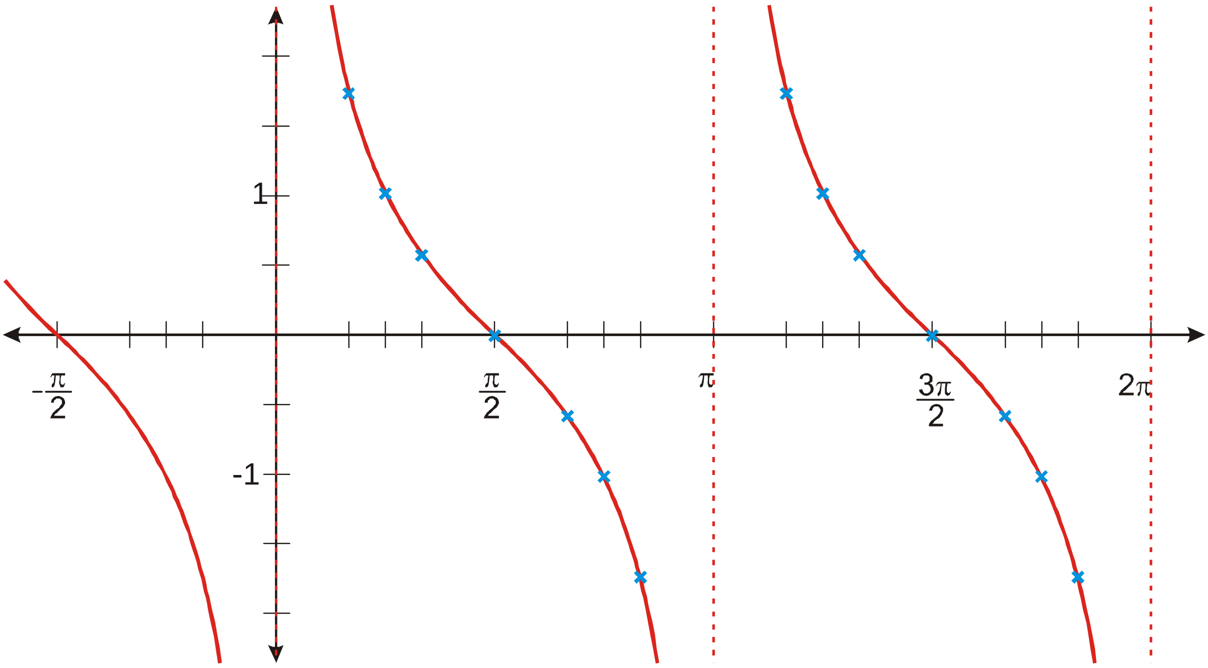
- Hodnoty v dalších intervalech můžeme zkopírovat z již nakreslené části grafu, protože funkce $y=\sin x$ a $y=\cos x$ jsou periodické s nejmenší periodou 2π a výsledek jejich dělení se musí opakovat se stejnou periodou.



Př. 3: V tabulce hodnot goniometrických funkcí doplň hodnoty pro kotangens.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Př. 4: Zakresli hodnoty spočtené v tabulce do odhadnutého grafu funkce $y = \text{cotg}\, x$ a ověř tak správnost odhadu.



Tabulkové hodnoty potvrzují odhadnutý tvar grafu.

Př. 5: Z grafu funkce $y = \text{cotg}\, x$ urči její vlastnosti.

$D(f) = R - \bigcup\limits_{k \in Z} \{0 + k\pi\}$ Periodická s nejmenší periodou π.

$H(f) = R$ Není omezená $\Rightarrow$ nemá maximum ani minimum.

Lichá.

Klesající v intervalu $(0;\pi)$, dále pak v intervalu $(\pi;2\pi)$, …, tedy ve všech intervalech $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$.

Kladné hodnoty v intervalech $\left(0 + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$.

Záporné hodnoty v intervalech $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi\right)$.

Př. 6: Dokaž pomocí její definice, že funkce $y = \text{cotg}\, x$ je lichá.

Potřebujeme $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x)$.

$$\text{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}$$

Použijeme vlastnosti goniometrických funkcí:

- sinus je lichý: $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- cosinus je sudý: $\cos(-x) = \cos(x)$.

$$\operatorname{cotg}(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}=-\operatorname{cotg}(x)$$

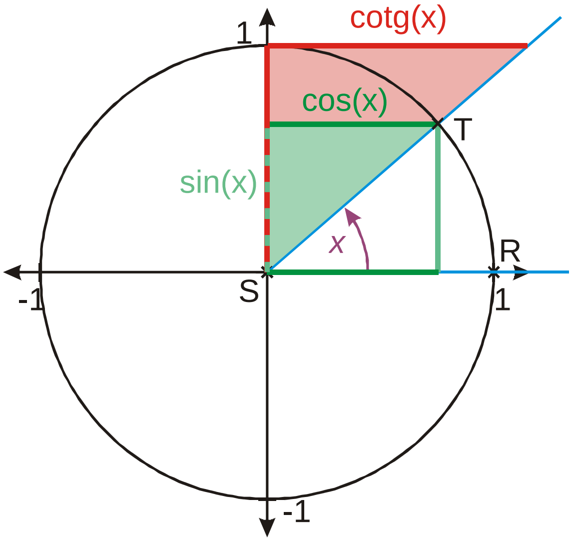
Př. 7: Najdi zobrazení hodnot funkce $y=\operatorname{cotg} x$ v jednotkové kružnici.

Definice: $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

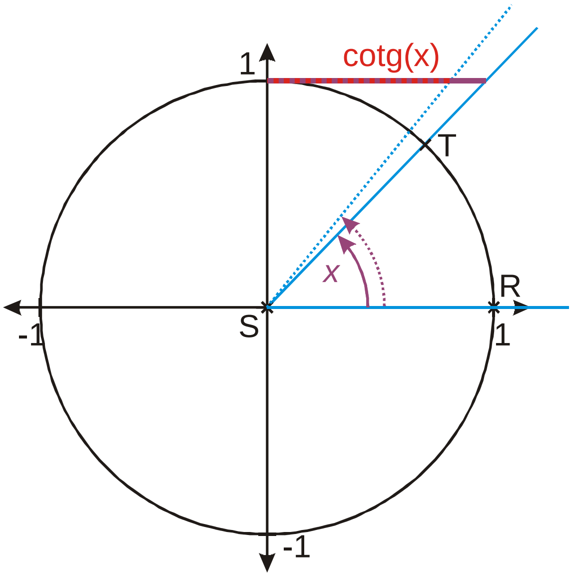
Upravíme výraz tak, abychom mohli použít poměr stran u podobných trojúhelníků:

$\frac{\operatorname{cotg} x}{1}=\frac{\cos x}{\sin x}$.

Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (svislá) odvěsna musí mít délku 1 $\Rightarrow$ trojúhelník získáme, když v bodě $[0;1]$ sestrojíme vodorovnou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu *x*. Vodorovná odvěsna má délku $\operatorname{cotg} x$.

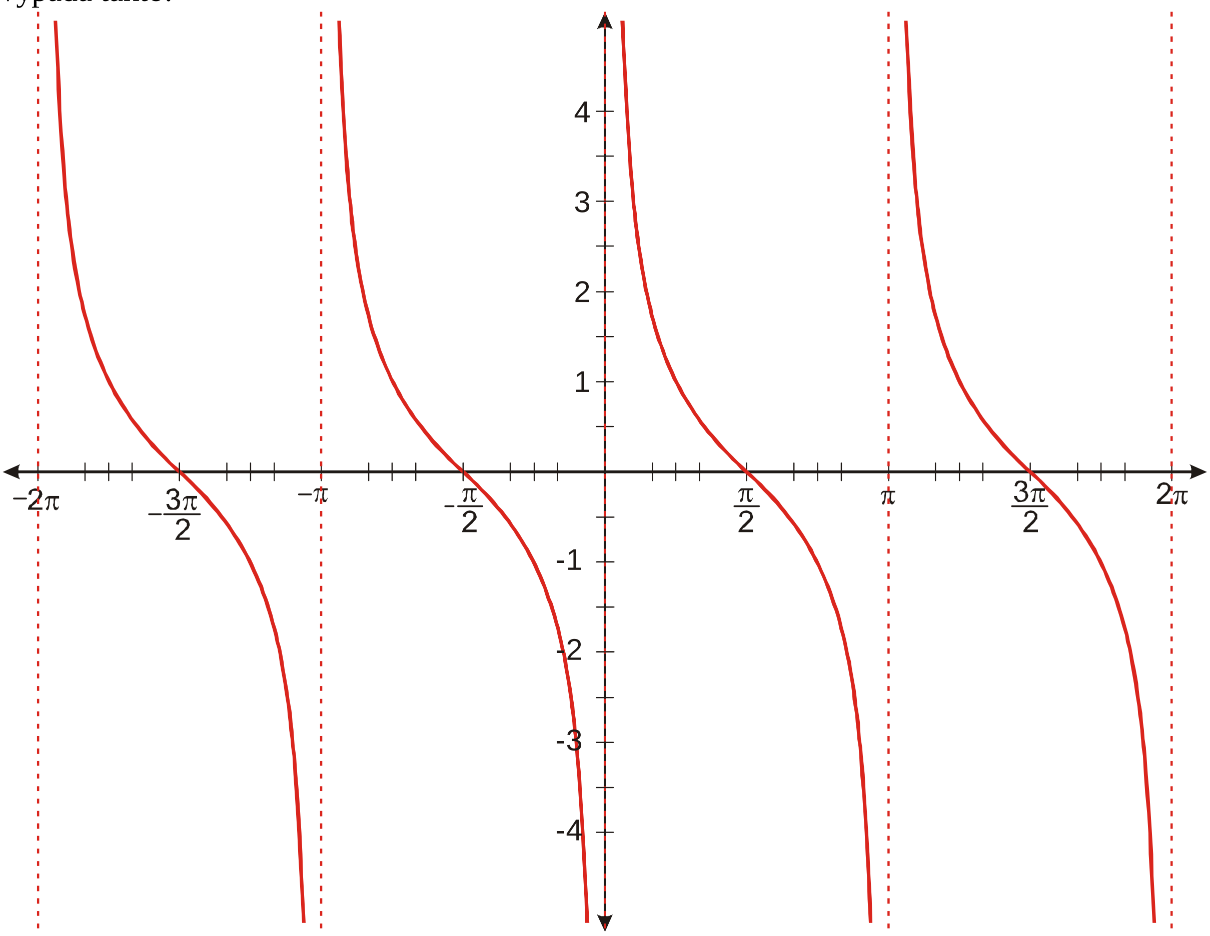


Př. 8: Pomocí znázornění funkce $y = \operatorname{cotg} x$ na jednotkové kružnici zdůvodni, proč je v intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ funkce $y = \operatorname{cotg} x$ klesající.

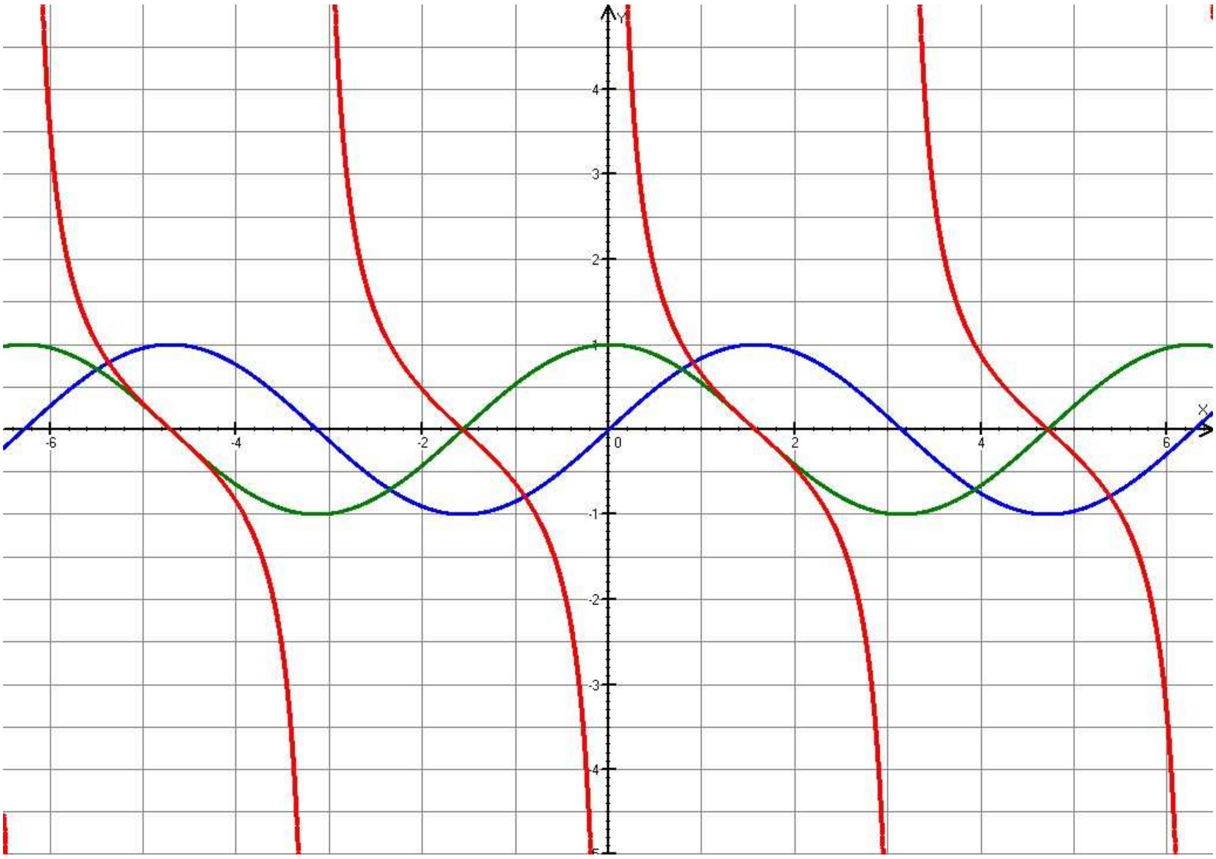


Z obrázku je zřejmé, že při zvětšování úhlu x se zmenšuje hodnota $\operatorname{cotg} x$.

V tomto okamžiku můžeme s klidem prohlásit naše grafy za správné. Graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$ vypadá takto:

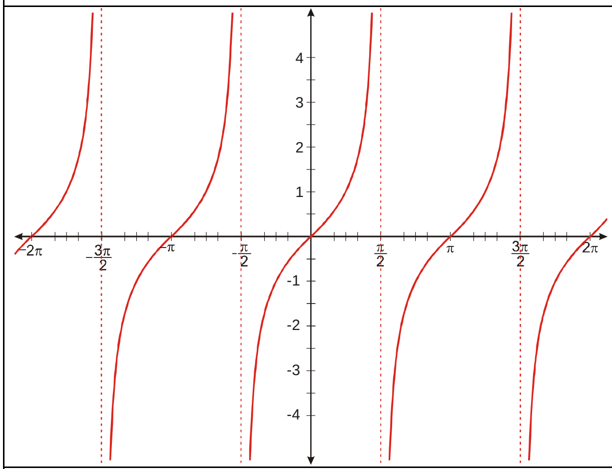
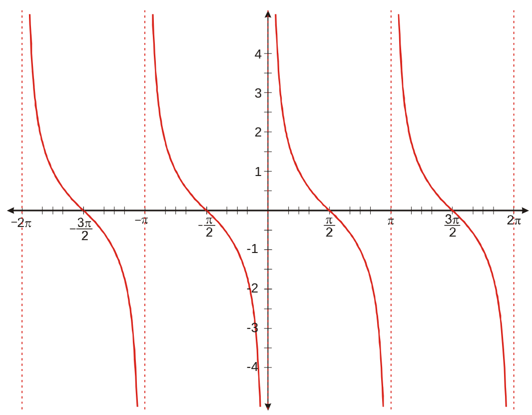


Správnost grafu můžeme ověřit i pomocí počítačového programu:
Nakresleny jsou grafy funkcí $y = \text{cotg}\, x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$



Nebo dynamickým modelem jednotkové kružnice.

Př. 9: Vytvoř tabulku se dvěma sloupci, ve které porovnáš vlastnosti funkcí $y = \text{tg}\, x$ a $y = \text{cotg}\, x$.

$y = \text{tg}\, x$	$y = \text{cotg}\, x$
	
$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \{0 + k\pi\}$
periodická s nejmenší periodou π	periodická s nejmenší periodou π
$H(f) = R$	$H(f) = R$
není omezená	není omezená

nemá maximum ani minimum	nemá maximum ani minimum
lichá	lichá
rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	klesající v intervalu $\left(0+k\pi;\pi+k\pi\right)$

Př. 10: Petáková:
strana 43/cvičení 28 g_3, g_5, g_7

Shrnutí: Funkce kotangens je definována jako podíl $y=\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Má nejmenší periodu π a definiční obor $D(f)=R-\bigcup_{k\in Z}\{0+k\pi\}$.