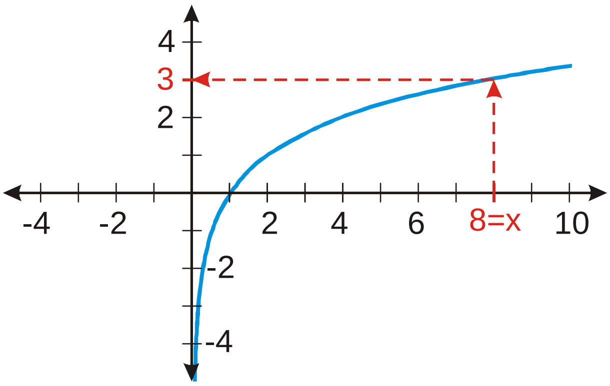
2.9.19 Logaritmické rovnice I

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Podmínka: $x > 0$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).
Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$



Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:
a) $3\ \{\log_{10}\}$ b) $2\ \{\log_5\}$ c) $-1\ \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5\ \{\log_4\}$
e) $0\ \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2}\ \{\log_3\}$

a) $3 = \log_{10} 10^3 = \log_{10} 1000$
b) $2 = 2\log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$
c) $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$
d) $0,5 = \log_4 4^{0,5} = \log_4 2$
e) $0 = \log_\pi \pi^0 = \log_\pi 1$
f) $\sqrt{2} = \sqrt{2}\log_3 3 = \log_3 3^{\sqrt{2}}$

Př. 3: Vyřeš rovnice:
a) $\log_2(x-2) = 4$ b) $3\log_2(3x+1) = 6$
c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$ d) $\ln\log_2\log_{0,5} x = 0$ (jinak $\ln\left(\log_2\left[\log_{0,5} x\right]\right) = 0$)
e) $\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}\right]\right) = \frac{1}{3}$

a) $\log_2(x-2) = 4$
Podmínka: $x > 2$ (nemůžeme dosadit cokoliv).
$\log_2(x-2) = 4$
$\log_2(x-2) = \log_2 2^4$
$\log_2(x-2) = \log_2 16$ $x-2 = 16$
$x = 18$ $K = \{18\}$

b) $3\log_2(3x+1) = 6$
Podmínka: $3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$.
$\log_2(3x+1) = 2$
$\log_2(3x+1) = \log_2 2^2$ - odlogaritmujeme
$3x+1 = 4$ $3x = 3$
$x = 1$ $K = \{1\}$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$
Podmínka: $x > -1$.
$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$
$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}} 3$ - odlogaritmujeme
$1+x = 3$
$x = 2$ $K = \{2\}$

d) $\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = 0$ Podmínka: $x > 0$.
$\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1$ - odlogaritmujeme
$\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2$ - odlogaritmujeme
$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ - odlogaritmujeme
$x = \frac{1}{4}$ $K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

e) $\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}\right]\right)=\frac{1}{3}$ Podmínka: $x>0$.

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}\right]\right)=\log_8 2$ - odlogaritmujeme

$\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}\right]=\log_3 3$ $1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}=3$

$\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}=\log_2 2^2$ $2-\log_{0,5} x=4$

$-\log_{0,5} x=2$ $\log_{0,5} x=-2=\log_{0,5} 0,5^{-2}$ $x=4$ $K=\{4\}$

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$ b) $\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

c) $2\log x=\log\left(x+6\right)$

a) $\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$

Podmínky: $x^2+x>0$, $-2x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2\left(x^2+x\right)=\log_2\left(-2x\right)$

$x^2+x=-2x$

$x^2+3x=0$

$x\left(x+3\right)=0$

$x_1=0$ $x_2=-3$

Ověření podmínek:

$x_1=0$: $0^2+0>0$ - nevyhovuje

$x_2=-3$: $\left(-3\right)^2+\left(-3\right)=9-3=6>0$

$-2x=-2\left(-3\right)=6>0$

$K=\{-3\}$

b) $\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

Podmínky: $x^2-x>0$, $3-3x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left(3-3x\right)$

$x^2-x=3-3x$

$x^2+2x-3=0$

$\left(x+3\right)\left(x-1\right)=0$

$x_1=-3$ $x_2=1$

Ověření podmínek:

$x_1=-3$: $\left(-3\right)^2-\left(-3\right)=9+3>0$

$3-3\left(-3\right)=3+9>0$

$x_2=1$: $1^2-1=0$ - nevyhovuje

$K=\{-3\}$

c) $2\log x=\log\left(x+6\right)$

Podmínky: $x>0$, $x+6>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$2\log x=\log\left(x+6\right)$ - nejde odlogaritmovat, na levé straně není logaritmus

$\log x^2=\log\left(x+6\right)$ - teď už můžeme odlogaritmovat

$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$\left(x-3\right)\left(x+2\right)=0$

$x_1=3$ $x_2=-2$

Ověření podmínek:

$x_1=3$: $3>0$

$x_2=-2$: $-2<0$ nevyhovuje

$K=\{3\}$

Př. 5: Petáková:
strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)
strana 35, cvičení 10 c), d)