2.9.6 Exponenciální rovnice III

Př. 1: Vyřeš rovnici $2^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)a-a=\frac{2}{9}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}a=\frac{2}{9}$ $\qquad$ $a=\frac{4}{9}$

$a=\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\qquad$ $x=2$ $\qquad$ $K=\{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $20\cdot2^x-2^{x+1}=3^{x+2}-3^x$.

$20\cdot2^x-2^{x+1}=3^{x+2}-3^x \quad /:3^x$ $\qquad$ $20\cdot\frac{2^x}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^x}=\frac{3^{x+2}}{3^x}-\frac{3^x}{3^x}$ $\qquad$ $20\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-2\left(\frac{2}{3}\right)^x=9\cdot1-1$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a \Rightarrow 20a-2a=8$. $\qquad$ $18a=8$ $\qquad$ $a=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

$a=\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\qquad$ $x=2$ $\qquad$ $K=\{2\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $3\cdot5^{x-2}+7\cdot5^{x-3}=5\cdot3^{x-3}+5^{x-1}$.

$3\cdot5^{x-2}+7\cdot5^{x-3}=5\cdot3^{x-3}+5^{x-1} \quad /:5^{x-3}$ $\qquad$ $3\cdot\frac{5^{x-2}}{5^{x-3}}+7\cdot\frac{5^{x-3}}{5^{x-3}}=5\cdot\frac{3^{x-3}}{5^{x-3}}+\frac{5^{x-1}}{5^{x-3}}$

$3\cdot5+7\cdot1=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}+25$ $\qquad$ $-3=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$ $\qquad$ $-\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$ $\qquad$ $K=\emptyset$

Př. 4: Vyřeš rovnici $3\cdot2^{2-x}+2\cdot2^{1-x}=8\cdot3^{2-x}+3\cdot3^{1-x}$.

$3\cdot2^{2-x}+2\cdot2^{1-x}=8\cdot3^{2-x}+3\cdot3^{1-x} \quad /3^{2-x}$ $\qquad$ $3\cdot\frac{2^{2-x}}{3^{2-x}}+2\cdot\frac{2^{1-x}}{3^{2-x}}=8\cdot\frac{3^{2-x}}{3^{2-x}}+3\cdot\frac{3^{1-x}}{3^{2-x}}$

$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}+2\cdot\frac{2^{2-x-1}}{3^{2-x}}=8\cdot1+3\cdot\frac{1}{3}$ $\qquad$ $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=8\cdot1+3\cdot\frac{1}{3}$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=a \Rightarrow 3a+a=9$ $\qquad$ $4a=9$ $\qquad$ $a=\frac{9}{4}$

$a=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=\frac{9}{4}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\qquad$ $2-x=-2$ $\qquad$ $x=4$ $\qquad$ $K=\{4\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $2\cdot 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1}$.

$2\cdot 2\cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3\cdot 3^{x-\frac{1}{2}} + 4^{x-\frac{1}{2}} \quad / : 4^{x-\frac{1}{2}}$ $\qquad 4 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} + 1$

Substituce: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = a \Rightarrow 4 - a = 3a + 1$ $\qquad 3 = 4a$ $\qquad a = \frac{3}{4}$

$a = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ $\qquad x - \frac{1}{2} = 1$ $\qquad x = \frac{3}{2}$ $\qquad K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $9^{x+1} + 5\cdot 6^x = 4^{x+1}$.

$9\cdot 9^x + 5\cdot 2^x\cdot 3^x = 4\cdot 4^x$ $\qquad 9\cdot 3^x\cdot 3^x + 5\cdot 2^x\cdot 3^x = 4\cdot 2^x\cdot 2^x$

$9\cdot 3^x\cdot 3^x + 5\cdot 2^x\cdot 3^x = 4\cdot 2^x\cdot 2^x \quad / : \left(2^x\cdot 2^x\right)$ $\qquad 9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x + 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 4\cdot 1$

Substituce: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = a \Rightarrow 9a\cdot a + 5a = 4$. $\qquad 9a^2 + 5a - 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 9\cdot(-4)}}{2\cdot 9} = \frac{-5 \pm 13}{18}$ $\qquad a_1 = \frac{-5+13}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ $\qquad a_2 = \frac{-5-13}{18} = -1$

$a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \frac{4}{9}$ $\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ $\qquad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = -1$

$x_1 = -2$

$K = \{-2\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $4\cdot 16^x + 4^{x+1} = 2\cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$.

$4\cdot 16^x + 4^{x+1} = 2\cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$ $\qquad 4\cdot\left(2^4\right)^x + \left(2^2\right)^{x+1} = 2\cdot\left(2^3\right)^{x+1} + 2^{3x}$

$4\cdot 2^{4x} + 2^{2x+2} = 2\cdot 2^{3x+3} + 2^{3x}$ $\qquad 4\cdot 2^{4x} + 2^2\cdot 2^{2x} = 2\cdot 2^3\cdot 2^{3x} + 2^{3x}$

$4\cdot 2^{4x} + 4\cdot 2^{2x} = 16\cdot 2^{3x} + 2^{3x} \quad / : 2^{2x}$ $\qquad 4\cdot 2^{2x} + 4 = 16\cdot 2^x + 2^x$

Substituce: $2^x = a \Rightarrow 4a^2 + 4 = 16a + a$ $\qquad 4a^2 - 17a + 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\cdot 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$

$a_1 = \frac{17+15}{8} = \frac{32}{8} = 4$ $\qquad a_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4}$

Návrat k původní proměnné:

$a_1 = 2^{x_1} = 4$ $\qquad 2^{x_1} = 2^2$ $\qquad x_1 = 2$ $\qquad a_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{4}$ $\qquad 2^{x_2} = 2^{-2}$ $\qquad x_2 = -2$

$K = \{-2; 2\}$

Př. 8: Petáková:
strana 34/cvičení 4 b) c) d)
strana 34/cvičení 5 a) b)