2.9.5 Exponenciální rovnice II

Předpoklady: 2904

Př. 1: Vyřeš rovnici $3\cdot 2^x + 2^x = 32$.

Problém: Na levé straně máme $3\cdot 2^x + 2^x$, mezi mocninami je + $\Rightarrow$ mocniny nemůžeme je dát dohromady podle vzorců pro počítání s mocninami. Můžeme ale substituovat $y = 2^x$ a dořešit exponenciální část rovnice později.

$3\cdot 2^x + 2^x = 32$

Substituce: $y = 2^x \Rightarrow 3y + y = 32$

$4y = 32$

$y = 8$

Návrat k původní proměnné: $y = 2^x = 8$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$ $\qquad K = \{3\}$

Poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě možné řešit (stejně jako i mnoho dalších) bez substituce pouze vytknutím, takto: $3\cdot 2^x + 2^x = 32$.

$2^x(3+1) = 32$

$4\cdot 2^x = 32$

$2^x = 8$

$x = 3$

Substituce však řešení příkladu většinou usnadňuje a rozhodně ho činí přehlednějším.

Př. 2: Vyřeš rovnici $2\cdot 3^x + 3^{x+1} = 5$.

Stejné jako předchozí příklad, pouze druhy člen si musíme upravit.

$2\cdot 3^x + 3^x \cdot 3^1 = 5$

Substituce: $y = 3^x \Rightarrow 2y + 3y = 5$

$5y = 5$

$y = 1$

Návrat k původní proměnné:

$y = 3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0$ $\qquad K = \{0\}$

Ještě než se pustíme do dalších rovnic, procvičíme si substituování.

Jak dopadne substituce výrazu 3^{x+1}, když používáme substituci $3^{x-1} = y$?

Musíme výraz 3^{x+1} upravit tak, aby se v něm objevil výraz 3^{x-1}:

Možností je mnoho, musíme si vybrat tu, která je pro nás přirozená:

- $3^{x+1} = 3^{\overbrace{x-1+1+1}^{0}} = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- $3^{x+1} = 3^{\overbrace{x-1+2}^{1}} = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- $3^{x+1} = 3^{x+1}\dfrac{3^2}{3^2} = \dfrac{3^{x+1}}{3^2}3^2 = 3^{x-1} \cdot 3^2 = 9y$
- atd.

Pedagogická poznámka: Snažím se na tabuli ukázat více možností, nechávám na studentech, aby si vybrali způsob, který je jim vlastní. Vnucovat studentům nějaký mechanický postup je zbytečné, ihned ho zapomínají a dělají v něm hodně chyb.

Př. 3: Proveď substituci výrazů:
a) 2^{x+2}, 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$
b) 3^{x+2}, 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$
c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) 2^{x+2}, 2^{x-1} pokud platí $y = 2^x$

$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4y$

$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \dfrac{y}{2}$

b) 3^{x+2}, 3^{x-3} pokud platí $y = 3^{x-2}$

$3^{x+2} = 3^{x-2+2+2} = 3^{x-2} \cdot 3^4 = 81y$

$3^{x-3} = 3^{x-2-1} = 3^{x-2} \cdot 3^{-1} = \dfrac{y}{3}$

c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+2}$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+2}$ pokud platí $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1-1-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = y\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4y}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\left[\frac{3}{2}\right]^{-1}\right)^{x+2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{3y}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{3y}$$

Pedagogická poznámka: Větší problémy bývají pouze v bodě c), kde většinou příklad počítáme na tabuli s tím, že se dohodneme na pořadí kroků a hlavně kontrolujeme postupnost výpočtu s použitím závorek.

Ještě jedna dobrá rada: Možností, jak provést substituci, je většinou více. Snažíme se najít takovou, která co nejvíce zjednoduší další výpočet (složitější výraz v substituci).

Př. 4: Vyřeš rovnici $\frac{3^{x+4}}{9}+9\cdot 3^x=\frac{2}{3}$.

Problém: Nemůžeme ihned substituovat $y=3^x$, protože neznámá x se vyskytuje v různých výrazech $\Rightarrow$ upravíme vše tak aby šlo použít $y=3^x$. Dále pak jako na začátku hodiny.

$$\frac{3^x\cdot 3^4}{9}+9\cdot 3^x=\frac{2}{3}$$

Substituce: $y=3^x \Rightarrow \frac{y\cdot 3^4}{3^2}+9\cdot y=\frac{2}{3}$

$$9y+9y=\frac{2}{3}$$

$$18y=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{1}{27}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=3^x=\frac{1}{27}$$

$$3^x=\frac{1}{27}=3^{-3}$$

$x=-3$ $\qquad$ $K=\{-3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $3^x-2\cdot 3^{x-1}+3^{x-2}-2\cdot 3^{x-3}=30$.

Problém: Opět budeme muset upravovat výrazy před substitucí. Jakou substituci zvolit? Pokud substituujeme 3^{x-3} pomocí $y=3^x$ vzniknou nám zlomky (a s těmi se špatně počítá) $\Rightarrow$

Substituce: $y=3^{x-3}$, $3^x=3^{x-3}\cdot 3^3=27y$, $3^{x-1}=3^{x-3}\cdot 3^2=9y$, $3^{x-2}=3^{x-3}\cdot 3^1=3y$

$$27y-2\cdot 9y+3y-2\cdot y=30$$

$$10y=30$$

$$y=3$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=3^{x-3}=3$$

$$x-3=1$$

$x=4$ $\qquad$ $K=\{4\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{2-x}=2^{4-x}-3\sqrt[3]{2}$.

Hledáme substituci: Nejlepší možnost: $y=2^{2-x}$ (získáme jednoduchou rovnici bez zlomků)

$$2^{2-x}=2^2\cdot 2^{2-x}-3\sqrt[3]{2}$$

Substituce: $y=2^{2-x}$

$$y=4y-3\sqrt[3]{2}$$

$3\sqrt[3]{2} = 3y$

$y = \sqrt[3]{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y = 2^{2-x} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$2 - x = \frac{1}{3}$

$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = x$ $\qquad K = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Zkusíme upravit na substituci $2^x = y$.

$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2 \cdot \left(2^2\right)^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2 \cdot \left(2^x\right)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

Substituce: $y = 2^x$

$2y^2 - 9y + 4 = 0$

Kvadratická rovnice: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$

$y_1 = \frac{9+7}{4} = 4$

$y_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 2^{x_1} = 4$

$2^{x_1} = 2^2$

$x_1 = 2$

$y_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{2}$

$2^{x_2} = 2^{-1}$

$x_2 = -1$

$K = \{-1; 2\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici $4^x + 4^{\frac{3}{2} - x} = 9$.

Zkusíme rovnici upravit pro substituci $y = 4^x$: $4^x + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{4^x} = 9$.

$4^x + \frac{\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4^x} = 9$

$4^x + \frac{8}{4^x} = 9$

Substituce: $4^x = a$

$$a+\frac{8}{a}=9 \quad /\cdot a$$
$$a^2+8=9a$$
$$a^2-9a+8=0$$
$$(a-8)(a-1)=0$$
$$a_1=8 \qquad a_2=1$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1=4^{x_1}=8$$
$$\left(2^2\right)^{x_1}=2^{2x_1}=2^3$$
$$2x_1=3$$
$$x_1=\frac{3}{2}$$

$$a_2=4^{x_2}=1$$
$$4^{x_2}=4^0$$
$$x_2=0$$

$$K=\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je velmi zajímavý, synchronizujte třídu na předchozím příkladu, aby ho všichni mohli zkusit vyřešit.

Př. 9: Vyřeš rovnici $4^{x-0,2}-2\cdot 4^{0,2-x}=1$.

Problém: Číslo $4^{0,2}$ není zrovna nejběžnější $\Rightarrow$ snažíme se o zahrnutí do substituce.

Postřeh: Platí: $4^{0,2-x}=4^{-(x-0,2)}=\frac{1}{4^{x-0,2}}$

$$4^{x-0,2}-\frac{2}{4^{x-0,2}}=1$$

Substituce: $4^{x-0,2}=a$

$$a-\frac{2}{a}=1 \quad /\cdot a$$
$$a^2-2=a$$
$$a^2-a-2=0$$
$$(a-2)(a+1)=0$$
$$a_1=2 \qquad a_2=-1$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1=4^{x_1-0,2}=2$$
$$\left(2^2\right)^{x_1-0,2}=2^{2x_1-0,4}=2^1$$
$$2x_1-0,4=1$$
$$2x_1=1,4$$
$$x_1=0,7$$

$$a_2=4^{x_2-0,2}=-1$$

Mocnina čísla 4 nemůže být nikdy záporné číslo $\Rightarrow$ $K_2=\emptyset$

$$K=\{0,7\}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrou ukázkou toho, jak důležité je si něco pamatovat. Pokud studenti nemají zažito, že platí $a^{-1} = \frac{1}{a}$, těžko je může použitá substituce napadnout.

Hodně studentů si neví rady s rovnicí $a_2 = 4^{x_2 - 0,2} = -1$. V prvním okamžiku nikdy neprozrazuji výsledek, ale radím, aby opět promysleli, jaký je význam čísla 4^x.

Př. 10: Petáková:
strana 34/cvičení 2 b) c) d)
strana 34/cvičení 3 b) e) f)

Shrnutí: Substituci provádíme tak, aby vznikla co nejjednodušší rovnice.