

## 2.7.18 Řešení nerovnic metodou nulových bodů I

### Předpoklady:

**Pedagogická poznámka:** V tuto hodinu platí hodně z poznámek k hodině předchozí, studenti mají problém orientací v příkladu, který vyžaduje řešení podúloh. Opět můžete očekávat značné problémy, rozdílné rychlosti postupu, ale vzhledem k tomu, že studenti se potřebují ze všeho nejvíce naučit orientaci v příkladu, řešení příkladů na tabuli nepomáhá.

Řešení nerovnic z minulé kapitoly bylo poměrně náročné na neustálé sledování znamének a nerovností. Nešlo by to jinak?

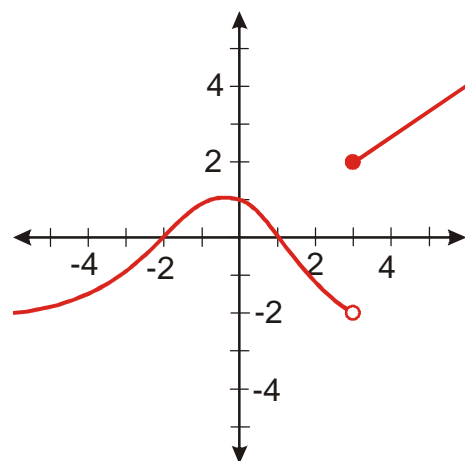
Řešíme:  $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ .

Nerovnici upravíme na tvar  $3\sqrt{3x-x^2-2} - x \geq 0$ .

Výraz vlevo můžeme brát jako předpis pro nějakou funkci.

Grafické řešení – hledáme, kdy je graf nad nebo pod osou  $x$ .

Jak může obecně graf v „nejhorším“ případě funkce  $y = f(x)$  vypadat?



**Př. 1:** Najdi řešení nerovnice  $f(x) > 0$ , pro funkci  $y = f(x)$  na grafu výše.

Řešením nerovnice  $f(x) > 0$  jsou všechna  $x$ , pro která je graf funkce  $y = f(x)$  nad osou  $x$ .

- Hodnota funkce  $y = f(x)$  je pro  $x = 0$  větší než nula  $\Rightarrow 0$  je řešením, stejně tak čísla kolem 0 až do místa, kde funkce přejde přes osu  $x$  (body  $x = -2$  a  $x = 1$ ).
- Hodnota funkce  $y = f(x)$  je pro  $x = 2$  menší než nula  $\Rightarrow 2$  není řešením, stejně tak čísla kolem 2 až do místa, kde funkce přejde přes osu  $x$  (body  $x = 1$  a  $x = 3$ ).
- a tak dále v dalších intervalech

$$K = (-2; 1) \cup (3; \infty)$$

Jak se funkce může dostat přes osu  $x$ ?

- funkce má hodnotu 0 (body  $x = -2$  a  $x = 1$ ), pro takové  $x$  platí  $f(x) = 0$  (což je rovnice), v konkrétním případě  $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x \Rightarrow$  takové body najdeme, když budeme řešit rovnici  $f(x) = 0$ .
- funkce je přetržená (bod  $x = 3$ ), u všech funkcí, které budeme používat na střední škole (mimo funkce  $\text{sgn}(x)$ ), může přetržení nastat jenom tam, kde funkce není definována  $\Rightarrow$  takové body najdeme, když zjistím definiční obor výrazů v nerovnici a stanovíme podmínky řešitelnosti

$\Rightarrow$  z předchozích úvah plyne

**Postup řešení nerovnici metodou nulových bodů (např. nerovnice  $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$ ):**

1. Zjistíme pro která  $x$  nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. (Kdy není definovaný libovolný výraz v nerovnici  $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$ ). **Našli jsme body přetržení.**
2. Vyřešíme rovnici  $f(x) = 0$  (např.  $3\sqrt{3x - x^2 - 2} = x$ ) a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu  $x$ .**
3. Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
4. **Nerovnice je vyřešena.**

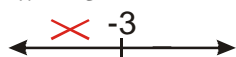
**Př. 2:** Vyřeš nerovnici  $\sqrt{x+3} \geq x+1$  metodou nulových bodů.

**1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice**

**levá strana:** pod odmocninou musí být nezáporné číslo  $\Rightarrow$

řešíme nerovnici  $x+3 \geq 0$

$$x \geq -3$$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro  $x \in (-\infty; -3]$ .

**2. Hledáme řešení rovnice  $\sqrt{x+3} = x+1$  (abychom objevili nulové body nerovnice, kde funkce přechází přes osu  $x$ ).**

$$\sqrt{x+3} = x+1 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

Zkouška:

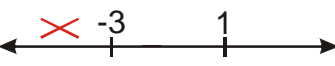
$$x_1 = -2 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{-2+3} = 1 \quad P = x+1 = -2+1 = -1$$

$$L \neq P$$

$$x_2 = 1 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 \quad P = x+1 = 1+1 = 2$$

$$L = P$$

$\Rightarrow$  jediný kořen  $x = 1$

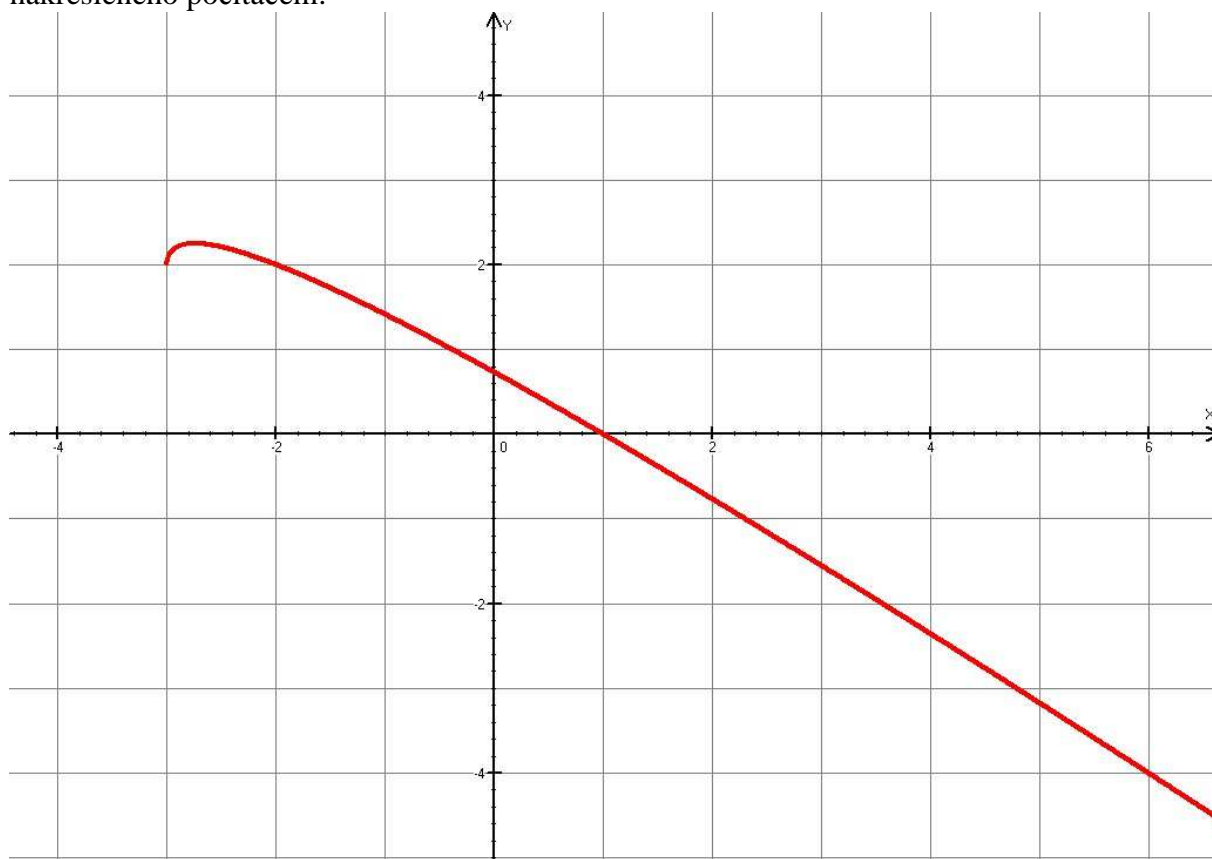
Doplňme získané kořeny na osu: 

### 3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval  $(-\infty; -3)$ : pro tato  $x$  není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval  $(-3; 1)$ : vybereme číslo například 0:  
 $\sqrt{x+3} \geq x+1$        $\sqrt{0+3} \geq 0+1$   
 $\sqrt{3} \geq 1$  - platí  $\Rightarrow$  interval  $(-3; 1)$  není řešením
- interval  $(2; \infty)$ : vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):  
 $\sqrt{x+3} \geq x+1$        $\sqrt{6+3} \geq 6+1$   
 $3 \geq 7$  - neplatí  $\Rightarrow$  interval  $(2; \infty)$  není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost  $\geq$  přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body  $\Rightarrow K = \langle -3; 1 \rangle$

**Poznámka:** Správnost výsledku si můžeme ověřit pomocí grafu funkce  $y = \sqrt{x+3} - (x+1)$  nakresleného počítačem:



**Dodatek:** V druhém kroku při řešení rovnice  $\sqrt{x+3} \geq x+1$  není zcela nutné dělat zkoušku i když víme, že jeden z kořenů je zřejmě pouze zdánlivý. Naším úkolem v druhém kroku je najít všechny nulové body, pokud mezi ně započítáme i zdánlivý kořen nic se nestane, jenom budeme mít ve třetím kroku o jeden interval navíc.

Ted' se můžeme vrhnout na nejhorší příšernost minulé hodiny.

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici  $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$  metodou nulových bodů.

**1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice**

**levá strana:** pod odmocninou musí být nezáporné číslo  $\Rightarrow$

řešíme nerovnici  $3x-x^2-2 \geq 0$

hledáme kořeny rovnice  $3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

$$x_1=1, x_2=2$$

Před  $x$  je záporné číslo – „kopeček“



Nerovnici můžeme řešit pouze pro  $x \in \langle 1; 2 \rangle$ .

**2. Hledáme řešení rovnice  $3\sqrt{3x-x^2-2} = x$  (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu  $x$ .**

$$\left(3\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 = (x)^2$$

$$3^2 \left(\sqrt{3x-x^2-2}\right)^2 = x^2$$

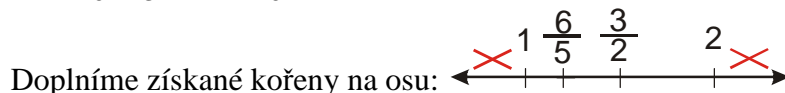
$$9(3x-x^2-2) = x^2$$

$$27x-9x^2-18 = x^2$$

$$10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2-4 \cdot 10 \cdot 18}}{2 \cdot 10} = \frac{27 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{27 \pm 3}{20}$$

$$x_1 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$



**3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost**

- interval  $(-\infty; 1)$ : pro tato  $x$  není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.

- interval  $\left(1; \frac{6}{5}\right)$ : vybereme číslo například 1,1:

$$3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,1 - (1,1)^2} - 2 \geq 1,1$$

$$0,9 \geq 1,1 - \text{neplatí} \Rightarrow \text{interval} \left(1; \frac{6}{5}\right) \text{ není řešením}$$

- interval  $\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$ : vybereme číslo například 1,3:

$$3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,3 - (1,3)^2} - 2 \geq 1,3$$

$$1,37 \geq 1,3 - \text{platí} \Rightarrow \text{interval} \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right) \text{ je řešením}$$

- interval  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ : vybereme číslo například 1,7:

$$3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x \qquad 3\sqrt{3 \cdot 1,7 - (1,7)^2 - 2} \geq 1,7$$

$$1,37 \geq 1,7 - \text{neplatí} \Rightarrow \text{interval } \left(\frac{3}{2}; 2\right) \text{ není řešením}$$

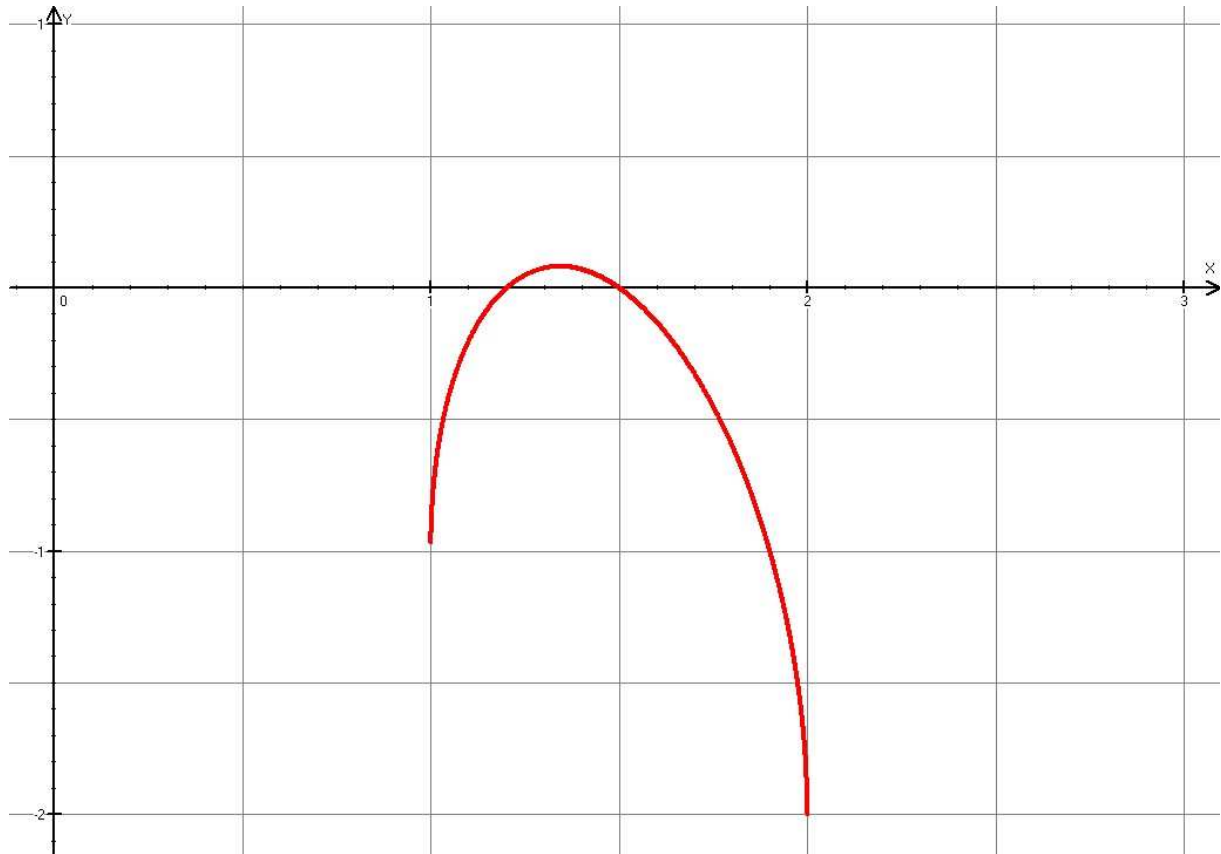
- interval  $(2; \infty)$ : pro tato  $x$  není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost  $\geq$  přidám k nalezenému intervalu ještě nulové

body  $\Rightarrow K = \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$

**Poznámka:** Správnost řešení můžeme demonstrovat i pomocí grafu funkce

$$y = 3\sqrt{3x - x^2 - 2} - x :$$



**Př. 4:** Petáková:  
strana 14/cvičení 21 a) d)

**Shrnutí:** Při výpočtu metodou nulových bodů body přetržení a nulové body rozdělí osu  $x$  na intervaly, ve kterých ověříme platnost nerovnosti dosazením.