

2.5.7 Vzorec pro řešení obecné kvadratické rovnice

Zkusíme nejdříve konkrétní rovnici: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 = 1 \quad K = \{1; 3\}$$

Př. 1: Ověř předchozí výsledek dosazením do rovnice.

$$x^2 - 4x + 3 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \qquad x^2 - 4x + 3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

Př. 2: Zopakuj předchozí postup pro vyřešení kvadratické rovnice pro konkrétní rovnici $2x^2 - 4x - 16 = 0$ a pro rovnici v obecném tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$. Příklad řeš po jednotlivých krocích do dvou sloupců tak, aby jednotlivé kroky byly vedle sebe.

$$2(x^2 - 2x - 8) = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8 = 0$$

$$(x-1)^2 - 9 = 0$$

Odmocníme pravou stranu:

$$(x-1)^2 = 9$$

$$(x-1) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Dopočteme kořeny:

$$x_1 - 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 - 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \quad / : a \text{ (jde to, víme } a \neq 0)$$

$$x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad b^2 - 4ac = D > 0.$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Př. 3: Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} \qquad K = \{-1; 2\}$$

Př. 4: Vyřeš kvadratickou rovnici $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

$$3x^2 - 2x + 5 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6} \qquad K = \emptyset$$

Př. 5: Vyřeš kvadratickou rovnici dosazením do vzorce:

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $3x^2 - x + 4 = 0$

c) $0,15x^2 - 0,03x - 2 = 0$

d) $104x^2 - 166x + 66 = 0$

e) $4x^2 - 20x - 2 = 0$

f) $3x^2 - \pi x + 2 = 0$

$$g) x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$h) x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$$

$$i) x^2 + x + x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

$$a) x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-1} \quad K = \{3 - \sqrt{13}; 3 + \sqrt{13}\}$$

$$b) 3x^2 - x + 4 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{6} \quad K = \emptyset$$

$$c) 0,15x^2 - 0,03x - 2 = 0 \quad / \cdot 100$$

$$15x^2 - 3x - 200 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-200)}}{2 \cdot 15} = \frac{3 \pm \sqrt{12009}}{30}$$

$$K = \left\{ \frac{3 - \sqrt{12009}}{30}; \frac{3 + \sqrt{12009}}{30} \right\}$$

$$d) 104x^2 - 166x + 66 = 0 \quad / : 2$$

$$52x^2 - 83x + 33 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{83 \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot 52 \cdot 33}}{2 \cdot 52} = \frac{83 \pm \sqrt{25}}{104} = \frac{83 \pm 5}{104} \quad K = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{11}{13} \right\}$$

$$e) 4x^2 - 20x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{432}}{8} = \frac{20 \pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{10}{3} - 2\sqrt{3}; \frac{10}{3} + 2\sqrt{3} \right\}$$

$$f) 3x^2 - \pi x + 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{\pi \pm \sqrt{(-\pi)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 24}}{6} = \frac{\pi \pm \sqrt{9,87 - 24}}{6}$$

$$K = \emptyset$$

$$g) x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(1 - 2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{2})}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{2} \pm 3}{2}$$

$$K = \{-2 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$$

$$h) x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}}}{2 \cdot 1} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 4\sqrt{5}}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$K = \{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}; \sqrt{3} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\}$$

$$i) x_{1,2} = \frac{-(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm |1 - \sqrt{3}|}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{2} \quad K = \{-\sqrt{3}; -1\}$$