2.3.17 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic I

Předpoklady: 2314

Pedagogická poznámka: Jak už bylo uvedeno dříve slovní úlohy tvoří specifickou část matematiky jednoduše proto, že nestačí sledovat dříve vysvětlený algoritmus, ale je nutné přidat vlastní invenci a porozumění situaci.
Smůla je, že na základních školách se většinou tuto situaci snaží řešit tím, že slovní úlohy namačkají do několika typů, které se děti učí řešit zcela automaticky a bez porozumění. Ještě smutnější je fakt, že i když s tímto stereotypem částečně úspěšně bojujete v kapitolách 2210-2212 po měsíci se všechno vrátí do starých kolejí. Co s tím nevím, snažím se stále trvat na tom, aby:
každý výraz a každá rovnice měly svoji větu, kterou popisují
sčítali se pouze věci, které mají stejný význam
studenti postupovali pomalu a nesnažili se řešit úlohu jedním vrzem.
Sestavování rovnic se snažím nechávat vždy na studentech, řešení soustavy někdy urychlím promítnutím na zeď.

Některé slovní úlohy je možné řešit jednodušeji, když se nesnažíme sestavit jedinou rovnici s jedinou neznámou, ale sestavíme rovnic více s více neznámými. Kterou s těchto možností zvolíme záleží nejen na konkrétním příkladu, ale i na tom, který způsob nám více vyhovuje.

Př. 1: Jsou dána dvě kladná čísla. První číslo je o 176 větší než dvojnásobek druhého. Podíl většího a menšího čísla je 13. Urči čísla.

Neznámé: první číslo x
druhé číslo y

Rovnice: první číslo je o 176 větší než dvojnásobek druhého: $x = 2y + 176$

Podíl většího a menšího čísla je 13: $\frac{x}{y} = 13 \Rightarrow x = 13y$

Soustava rovnic:
$x = 2y + 176$
$x = 13y$
Srovnáme pravé strany:
$13y = 2y + 176$
$11y = 176$
$y = 16$
$x = 16 \cdot 13 = 208$
Prvním číslem je 208, druhým 16.

Př. 2: Pět kilogramů jablek a tři kilogramy banánů stojí 146 Kč, dva kilogramy jablek a pět kilogramů banánů stojí 142 Kč. Kolik stojí kilogram jablek a kolik kilogram banánů?

Neznámé: cena 1 kg jablek j
cena 1 kg banánů b

Rovnice: pět kilogramů jablek a tři kilogramy banánů stojí 146 Kč: $5j+3b=146$
dva kilogramy jablek a pět kilogramů banánů stojí 142 Kč: $2j+5b=142$

Soustava:

$$5j+3b=146 \quad /\cdot 2$$
$$2j+5b=142 \quad /\cdot(-5)$$
$$10j+6b=292$$
$$-10j-25b=-710$$
$$0j-19b=-418 \Rightarrow b=\frac{418}{19}=22$$

Dosadíme do první rovnice a dopočítáme *j*:

$$5j+3\cdot 22=146$$
$$5j=80$$
$$j=16$$

Kilogram jablek stojí 16 Kč, kilogram banánů 22 Kč.

Př. 3: Dvojciferné číslo je sedminásobkem svého ciferného součtu. Zaměníme-li pořadí jeho číslic, dostaneme číslo o 27 menší. Urči původní číslo.

Neznámé: cifra na místě desítek x
cifra na místě jednotek y

Celé číslo vyjádřené pomocí svých cifer: $xy=10x+y$

Rovnice: dvojciferné číslo je sedminásobkem svého ciferného součtu: $10x+y=7(x+y)$
Zaměníme-li pořadí jeho číslic, dostaneme číslo o 27 menší: $10y+x+27=10x+y$

Soustava:

$$10x+y=7(x+y) \Rightarrow 10x-7x+y-7y=0 \Rightarrow 3x-6y=0$$
$$10y+x+27=10x+y \Rightarrow 10y-y+x-10x=-27 \Rightarrow -3x+3y=-9$$
$$3x-6y=0$$
$$-3x+3y=-9$$
$$-3y=-9 \Rightarrow y=3$$

Dosazením dopočítáme *x*:

$$3x-6\cdot 3=0$$
$$3x=18$$
$$x=6$$

Hledané číslo je 63.

Pedagogická poznámka: Zápis čísla pomocí cifer $xy=10x+y$ prozradím na tabuli brzo, nemá cenu u něj ztrácet čas, většina studentů si stejně nevzpomene.

Př. 4: Když délku obdélníku o 1 cm zvětšíme a jeho šířku o 2 cm zmenšíme, zmenší se obsah obdélníku o 16 cm^2. Když však délku zmenšíme o 2 cm a šířku zvětšíme o 1 cm zmenší se obsah obdélníku o 4 cm^2. Urči rozměry obdélníku.

Neznámé: délka obdélníku d
šířka obdélníku s
původní obsah obdélníku $S = ab = ds$

Rovnice:
délku obdélníku o 1 cm zvětšíme a jeho šířku o 2 cm zmenšíme, zmenší se obsah obdélníku o 16 cm^2: $(d+1)(s-2) = ds - 16$
délku zmenšíme o 2 cm a šířku zvětšíme o 1 cm zmenší se obsah obdélníku o 4 cm^2:
$(d-2)(s+1) = ds - 4$

Soustava:
$(d+1)(s-2) = ds - 16 \Rightarrow ds - 2d + s - 2 = ds - 16 \Rightarrow -2d + s = -14$
$(d-2)(s+1) = ds - 4 \Rightarrow ds + d - 2s - 2 = ds - 4 \Rightarrow d - 2s = -2$

$$\begin{aligned} -2d + s &= -14 \\ d - 2s &= -2 \qquad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2d + s &= -14 \\ 2d - 4s &= -4 \end{aligned}$$

$-3s = -18$
$s = 6$
Dosadíme a dopočítáme délku:
$d - 2\cdot 6 = -2$
$d = 10$
Původní rozměry obdélníku byly 10cm a 6 cm.

Pedagogická poznámka: Na zbývající dva příklady je třeba, alespoň 20 minut. U příkladu 5 mají studenti jednak problémy s tím, aby si vůbec vzpomněli na metodu, kterou se tyto příklady řeší. Poměrně obtížné je pro ně i následné řešení soustavy, která má na počátku neznámé pouze ve jmenovateli.

Př. 5: Nádrž je napouštěna dvěma čerpadly. Pokud obě čerpadla pracují společně, nádrž se naplní za 2 hodiny. Při posledním napouštění se po hodině první čerpadlo porouchalo a trvalo ještě 3 hodiny než druhé čerpadlo nádrž napustilo. Jak dlouho by nádrž napouštělo každé z čerpadel?

Neznámé: 1. čerpadlo … samo za x hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu … $\frac{1}{x}$ nádrže

2. čerpadlo … samo za y hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu … $\frac{1}{y}$ nádrže

Rovnice:
Pokud obě čerpadla pracují společně, nádrž se naplní za 2 hodiny
$$2\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{y} = 1$$
po hodině se první čerpadlo porouchalo a trvalo ještě 3 hodiny než druhé čerpadlo napustilo

$$\frac{1}{x}+(1+3)\frac{1}{y}=1$$

Soustava rovnic:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1 \quad /\cdot xy$$

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1 \quad /\cdot xy$$

$$2y+2x=xy$$

$$y+4x=xy$$

Z druhé rovnice vyjádříme y: $4x=xy-y$

$$4x=y(x-1)$$

$$y=\frac{4x}{x-1}$$

Dosadíme do první rovnice:

$$2\left(\frac{4x}{x-1}\right)+2x=x\frac{4x}{x-1} \qquad /\cdot(x-1)$$

$$8x+2x(x-1)=4x^2$$

$$8x+2x^2-2x=4x^2$$

$6x=2x^2 \quad /:3x$ víme, že $x\neq 0$

$$x=3$$

Dopočítáme y:

$$y=\frac{4x}{x-1}=\frac{4\cdot 3}{3-1}=6$$

Jedno čerpadlo napustí nádrž za 3 hodinu, druhé za 6 hodin.

Dodatek: Vzniklou soustavu rovnic by bylo možné řešit elegantněji pomocí substituce – nahrazením jednoho výrazu druhým. Neznámá x se vyskytuje pouze ve tvaru $\frac{1}{x}$, můžeme tedy na všechna tato místa napsat místo $\frac{1}{x}$ pouze a. Podobně provedeme záměnu $\frac{1}{y}\to b$, získáme tak soustavu:

$$2a+2b=1$$

$$a+4b=1$$

$$2a+2b=1$$

$$[\![1]\!]-2[\![2]\!] \qquad -6b=-1$$

$$b=\frac{1}{6}$$

Dopočítám a: $a+4\frac{1}{6}=1 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$$
$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{6} \Rightarrow y = 6$$

Př. 6: Dvě brigádnice sázejí stromky. Když první z nich sázela 2 hodiny a druhá 5 hodin, zjistily, že mají hotovou právě polovinu práce. Když obě sázely ještě 3 hodiny zůstalo dokončit pouze pět procent celého úkolu. Kolik hodin by pracovala každá z nich sama?

Neznámé: 1. brigádnice…………sama za x hod……….za 1h…. $\frac{1}{x}$ celé práce

2. brigádnice…………sama za y hod………..za 1h…. $\frac{1}{y}$ celé práce

Rovnice:
první z nich sázela 2 hodiny a druhá 5 hodin, zjistily, že mají hotovou právě polovinu práce
$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}$$

obě sázely ještě 3 hodiny zůstalo dokončit pouze pět procent celého úkolu
$$(2+3)\frac{1}{x} + (5+3)\frac{1}{y} = 0,95$$

Soustava:
$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2} \qquad /\cdot 2xy$$
$$\frac{5}{x} + \frac{8}{y} = 0,95 \qquad /\cdot xy$$

$$4y + 10x = xy$$
$$5y + 8x = 0,95xy$$

Vyjádříme z první rovnice y: $4y + 10x = xy \Rightarrow 4y = xy - 10x \Rightarrow y = \frac{xy - 10x}{4}$

Dosadíme do druhé: $5\left(\frac{xy-10x}{4}\right) + 8x = 0,95x$

$$\frac{5xy - 50x}{4} + 8x = 0,95xy /\cdot 4$$
$$5xy - 50x + 32x = 3,8xy$$
$1,2xy = 18x \quad /: x$ (víme, že platí $x \neq 0$)
$$1,2y = 18x$$
$$\underline{y = 15}$$

Dosadíme do první rovnice a dopočítáme x: $\frac{2}{x} + \frac{5}{15} = \frac{1}{2} /\cdot 30x$

$$60 + 10x = 15x$$
$$60 = 5x$$
$$\underline{x = 12}$$

První brigádnice by sama sázela 12 hodin, druhá 15 hodin.

Dodatek: Vzniklou soustavu rovnic by bylo možné řešit elegantněji pomocí substituce – nahrazením jednoho výrazu druhým. Neznámá x se vyskytuje pouze ve tvaru $\frac{1}{x}$, můžeme tedy na všechna tato místa napsat místo $\frac{1}{x}$ pouze a. Podobně provedeme záměnu $\frac{1}{y} \to b$, získáme tak soustavu:

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+5\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2a+5b=\frac{1}{2}$$

$$(2+3)\frac{1}{x}+(5+3)\frac{1}{y}=0,95 \qquad\qquad 5a+8b=0,95$$

$$2a+5b=0,5$$

$$5a+8b=0,95$$

$$2a+5b=\frac{1}{2}$$

$$5[\![1]\!]-2[\![2]\!] \qquad 9b=0,6 \Rightarrow b=\frac{1}{15}$$

$$2a+5\frac{1}{15}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a=\frac{1}{6} \Rightarrow a=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x}=a=\frac{1}{15} \Rightarrow x=15$$

$$\frac{1}{y}=b=\frac{1}{12} \Rightarrow y=12$$

Pedagogická poznámka: Příklad 6 je daleko těžší než příklad 5, přesto je úspěšnost v jejich řešení naprosto obrácená, protože u příkladu 5 už si nikdo nepamatuje, jak se takové příklady řeší. Pokud to vezmeme z té lepší stránky jedná se o dobrý náznak toho, že řešení slovních úloh není v žádném případě nad síly studentů (lépe řečeno, nebude, jakmile si budou schopni něco pamatovat).

Př. 7: Petáková:
strana 19/cvičení 54

Shrnutí: