2.3.13 Soustavy více rovnic o více neznámých I

Předpoklady: 2312

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ 2y + z &= 1 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$. Po vyřešení příkladu zhodnoť jeho obtížnost a co na ní mělo největší vliv.

Vyjádříme *z* ze třetí rovnice: $3z = 9$

$z = 3$

Hodnotu *z* dosadíme do druhé rovnice a vyjádříme *y*: $2y + z = 1 \Rightarrow 2y + 3 = 1$

$2y = -2$

$y = -1$

Hodnoty *z* a *y* dosadíme do první rovnice a vyjádříme *x*:

$3x - y + z = -2 \Rightarrow 3x - (-1) + 3 = -2$

$3x = -6$

$x = -2$ $\qquad K = \{[-2;-1;3]\}$

Podobné soustavy by měly být v písemce. Výpočet byl jednoduchý, protože z poslední rovnice jsme mohli ihned určit *z* a všechny další rovnice se daly vypočítat dosazením hodnot neznámých určených z rovnic pod nimi.
Levé strany soustavy mají tvar trojúhelníka (odshora ubývá neznámých, které v rovnicích účinkují) $\Rightarrow$ říkáme, že soustava je upravena do **(horního) trojúhelníkového tvaru**.
Z trojúhelníkového tvaru je zřejmé, že soustava obsahuje tři neznámé a tři podmínky. Žádná rovnice nemá levou stranu nulovou a když jdeme odzadu, každá obsahuje na levé straně o jednu neznámou víc než rovnice předchozí. Tím je zajištěno, že každá přináší do soustavy novou informaci a nejde nahradit žádnou kombinací předchozích rovnic.

Dodatek: Soustavu by bylo možné řešit i striktně sčítací metodou (je to ale zbytečné a jde o jasný projev masochismu).

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ 2y + z &= 1 \\ 3z &= 9 \quad /:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ 2y + z &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ [[2]]-[[3]] \qquad 2y &= -2 \quad /:2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llr}
[\![1]\!]+[\![2]\!]-[\![3]\!] & 3x = -6 & /:3 \\
& y = -1 & \\
& z = 3 & \\
\hline
& x = -2 & \\
& y = -1 & \\
& z = 3 & \\
\hline
\end{array}
$$

$K = \{[-2;-1;3]\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí dodatek studentům pouze ukazuji a nechci, aby si ji přepisovali do sešitů.

Pedagogická poznámka: Překvapilo mě, že značná část studentů buď nevěděla, jak příklad řešit, nebo začala upravovat rovnice sčítací metodou stylem, který je jako zcela nevhodný uveden v dodatku. Jde o jasnou ukázku studentské tendence bezmyšlenkovitě opakovat naposledy probíraný postup. Na tomto příkladu teď ukazuji, že je lepší se nejdříve trochu zamyslet.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{r} 2x-2y+z=3 \\ y-3z=4 \end{array}$.

Soustava má tři neznámé (tři možnosti volby) a dvě rovnice (dvě omezující podmínky) $\Rightarrow$ zbývá nám jedna možnost volby $\Rightarrow$ jednu neznámou můžeme volit a zbývající dvě vyjádříme pomocí této neznámé. Při vyjadřování začneme opět u nejjednodušší rovnice a postupujeme ke složitějším.
Vyjádřím *y* ze druhé rovnice pomocí *z*:

$y-3z=4$

$y=4+3z$

Dosadíme za *y* do první rovnice a vyjádříme *x*:

$2x-2y+z=3 \Rightarrow 2x-2(4+3z)+z=3$ - za *z* nedosazujeme, protože je to neznámou, kterou volíme

$2x-8-5z=3$

$2x=5z+11$

$x=\frac{5z+11}{2}$ $\qquad K=\left\{\left[\frac{5z+11}{2};4+3z;z\right], z\in R\right\}$

Pedagogická poznámka: Příklad končí úplnou blamáží. Skoro nikdo nebývá schopen s ním hnout. Teprve když jsme ho porovnáváme s předchozím a studenti si uvědomí, že v něm chybí třetí rovnice, která určila hodnotu *z*, přistoupí ve větším počtu na správné řešení.
Přesto jsme si skutečnost, že řešení soustavy je nekonečně mnoho ověřujeme tím, že si každý student zvolí číslo (hodnotu *z*) dopočítá hodnoty ostatních proměnných a dosadí je do soustavy. Fakt, že všechno vyjde, na studenty docela působí.
Dalším problém, který tento příklad zviditelnil je fakt, že studenti nejsou schopni si pamatovat obecná pravidla, která by jim mohla v takových situacích pomoci. Mám na mysli již zmiňované „neznámé jsou možnosti volby, rovnice jsou

podmínky, které volbu omezují“. Pokud by si tento poznatek pamatovali, dokázalo by jich příklad vyřešit víc.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $3x+2y+4z=6$.

Soustava má tři neznámé a jednu rovnici. Zbývají nám dvě možnosti volby $\Rightarrow$ dvě neznámé můžeme zvolit a zbývající vyjádříme pomocí těchto neznámých.
Zvolím y a z (nezáleží na tom, které neznámé si vyberu).
$3x+2y+4z=6 \Rightarrow 3x=6-2y-4z$

$x=\frac{6-4z-2y}{3}$ $\qquad$ $K=\left\{\left[\frac{6-4z-2y}{3};y;z\right] y\in R, z\in R\right\}$

Pedagogická poznámka: Po vyřešení příkladu 2 je tento pro studenty docela lehký.

Pedagogická poznámka: U následujících soustav musí studenti kromě závěrečného dopočítání soustavy provést i úpravu do trojúhelníkového tvaru. Mnozí jsou zvyklí ze základní školy postupovat v pomalých krocích, kdy zapisují vynásobený tvar rovnice před sčítáním, například takto:

$$\begin{array}{l} x+2y-z=0 \quad /\cdot 2 \\ 2x-y+2z=6 \quad /\cdot(-1) \\ x+y+z=6 \\ \hline 2x+4y-2z=0 \\ -2x+y-2z=-6 \\ x+y+z=6 \\ \hline 2x+4y-2z=0 \\ 5y-4z=-6 \\ x+y+z=6 \end{array}$$

Takový postup je neuvěřitelně zdlouhavý a u složitějších soustav neumožňuje dojít k řešení v reálném čase. Navíc spousta přepisování ústí do velkého množství chyb vzniklých při opisování čísel, se kterými se vůbec nepočítá. Tlačím studenty do toho, aby postupovali tak, jak je uvedeno dále v učebnici a sčítání i s násobením čísel u jednotlivých neznámých prováděli v duchu, pouze u složitějších čísel na kalkulačce, vždy však bez zbytečného opisování ostatních rovnic.
Při řešení pak bohužel postupují značně rozdílnými rychlostmi. V prvním příkladě pak kontrolu provádíme po každé spočítané řádce (někteří studenti se chvíli srovnávají se samotným stylem počítání z paměti) v dalším pak po krocích a teprve později kontrolujeme až celé příklady. Tady je nutné se přizpůsobit rychlosti, kterou je třída schopná postupovat.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x-y+2z=6 \\ x+y+z=6 \end{array}$.

Problém: Soustava není v trojúhelníkovém tvaru

$\Rightarrow$ pomocí sčítací metody upravíme soustavu do trojúhelníkového tvaru. Jednu z rovnic si necháme v původním tvaru a budeme s její pomocí upravovat ostatní. Budeme ji psát na prvním místě, proto před zahájením úprav rovnice prohážeme tak, aby první byla ta nejjednodušší (s nejjednoduššími koeficienty před neznámými) .

$$\begin{aligned} x+2y-z&=0\\ 2x-y+2z&=6\\ x+y+z&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ x+2y-z&=0\\ 2x-y+2z&=6 \end{aligned}$$

- třetí rovnici jsme dali na první místo

$$\begin{array}{lr} & x+y+z=6\\ [\![2]\!]-[\![1]\!] & y-2z=-6\\ [\![3]\!]-2\cdot[\![1]\!] & -3y=-6 \quad /:(-3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ y-2z&=-6\\ y&=2 \end{aligned}$$

Určili jsme hodnotu *y*, dosadíme ji do druhé rovnice a vypočteme *z*:

$y-2z=-6 \Rightarrow 2-2z=-6$

$-2z=-8$

$z=4$

Hodnoty *z* a *y* dosadíme do první rovnice a vypočteme *x*:

$x+y+z=6 \Rightarrow x+2+4=6$

$x=0$ $\qquad K=\{[0;2;4]\}$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x+2y-z&=0\\ 2x-y+2z&=6\\ x+y+z&=6 \end{aligned}$ dosazovací metodou.

Dosazovací metoda: vyjádříme si neznámou a dosazením zmenšíme počet neznámých ve zbývajících rovnicích

$$\begin{aligned} x+2y-z&=0\\ 2x-y+2z&=6\\ x+y+z&=6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ z poslední rovnice vyjádříme *z*: $x+y+z=6 \Rightarrow z=6-x-y$

dosadíme do první rovnice: $x+2y-(6-x-y)=0$

dosadíme do druhé rovnice: $2x-y+2(6-x-y)=6$

Jednodušší soustava: $\begin{aligned} 2x+3y&=6\\ -3y&=-6 \end{aligned}$

Nemusíme dále dosazovat: $y=2$

vypočteme *x*: $2x+3\cdot 2=6 \Rightarrow x=0$

vypočteme *z*: $z=6-0-2=4$ $\qquad K=\{[0;2;4]\}$

Pedagogická poznámka: Tento příklad je spíš cvičením toho, jak hluboce studenti pochopili princip dosazovací metody a zda jsou schopni postup použít i na složitější příklad.

Př. 6: Petáková:
strana 16/cvičení 31 a) b) d)

Shrnutí: