1.6.4 Mocniny s celým mocnitelem I

Předpoklady: 1601, 1602

Základní požadavek na krásu matematického pravidla = co nejobecnější s minimem výjimek.

$\Rightarrow$ nedokonalost z minula $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, platí když $r > s$ (ošklivá podmínka)

Použití je jasné, například: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

Jak budeme řešit případ $r \leq s$?

Zkusíme $r = s$

$\frac{a^r}{a_r} = \frac{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)} = 1$ všechno se pokrátí, nahoře i dole je *a* r-krát

Tedy platí: $\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0 = 1$

Pro všechna $a \in R$, $a \neq 0$ platí $a^0 = 1$

Zkusíme $r < s$

$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}$

Obecně, když $r < s$:

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a ... a}^{r \cdot krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a ... a}_{s \cdot krát}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a ... a}_{s-r \cdot krát}} = \frac{1}{a^{s-r}}$$

víme, co znamená výsledek, protože $s - r \in N \ (s > r)$

Problém: dva různé vzorce, dva různé postupy (pro $r > s$ a pro $r < s$), jak udělat jeden, aby se to nepletlo?

- $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$ minule
- $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$ dneska

$\Rightarrow$ stačí zavést $\left(\frac{1}{a^2}\right) = a^{-2}$, pak mohu počítat takto: $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (stejně jako včera a mám správný dnešní výsledek)

Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a pro každé $m \in N$ platí: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Teď už můžeme mít v mocniteli i záporné číslo.

Př. 1: Vyjádři jako zlomek:

a) a^{-2} b) 10^{-2} c) 3^{-1} d) 2^{-4}

a) $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ b) $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0,01$

c) $3^{-1}=\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$ d) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

Př. 2: Vyjádři co nejjednodušeji jako kladnou mocninu čísla většího než jedna:

a) $0,02^{-3}$ b) $0,04^{-2}$ c) $0,5^{-5}$

a) $0,02^{-3}=\left(\frac{2}{100}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1^3}{50^3}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{50^3}}=50^3$

b) $0,04^{-2}=\frac{1}{0,04^2}=\frac{1}{\left(\frac{4}{100}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{25}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1^2}{25^2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{25^2}}=25^2$

c) $0,5^{-5}=\left(\frac{5}{10}\right)^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=2^5$

Př. 3: Odstraň mocninu:

a) 2^{-2} b) $(-2)^{-2}$ c) $(-2)^{-3}$ d) 2^{-3} e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$

a) $2^{-2}=\frac{1}{4}$ b) $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$

c) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$ d) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ nebo jinak $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **záporné znaménko v exponentu neovlivňuje znaménko mocniny, o znaménku rozhoduje znaménko základu mocniny a sudost nebo lichost exponentu**

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, část studentů pravidelně považuje záporné mocniny za záporná čísla. Podle definice je to zjevný nesmysl, ale oni neuvažují podle definic a pravidel.

Př. 4: Zapiš jako mocninu prvočísla:

a) 49 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{16}$

a) $49 = 7^2$ b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

c) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$ d) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

Všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem platí i pro celočíselné mocnitele $\Rightarrow$

Pro každá dvě reálná čísla *a*, *b* **a pro každá dvě celá čísla** *r*, *s* **(tudíž i záporná) platí:**

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

Je-li $a \neq 0$**, pak** $a^r : a^s = a^{r-s}$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$

Je-li $b \neq 0$**, pak** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Př. 5: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina:

a) $3^{-5} \cdot 3^6$ b) $\left(2^7\right)^{-3}$ c) $\frac{4^3}{4^{-2}}$ d) $\left(2x\right)^{-2}$ e) $\frac{2^{-2}}{2^4}$

f) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}$ g) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} \cdot \frac{\left(a^{-2} \cdot b\right)^3}{\left(ab\right)^{-2}}$ h) $\left(a^2 b\right)^{-2} \cdot \left(a^{-3}\right)^{-2} \cdot b^4 b^{-3}$

a) $3^{-5} \cdot 3^6 = 3^{-5+6} = 3^1 = 3$ b) $\left(2^7\right)^{-3} = 2^{7 \cdot (-3)} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

c) $\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$ d) $\left(2x\right)^{-2} = 2^{-2} \cdot x^{-2} = \frac{1}{4x^2}$

e) $\frac{2^{-2}}{2^4} = 2^{-2-4} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$ f) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} = \frac{a^4}{b^{-6}} = a^4 b^6$

g) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} \cdot \frac{\left(a^{-2} \cdot b\right)^3}{\left(ab\right)^{-2}} = \frac{a^{-4}}{b^{-6}} \cdot \frac{a^{-6} \cdot b^3}{a^{-2} b^{-2}} = \frac{a^{-10} \cdot b^3}{a^{-2} b^{-8}} = a^{-8} b^{11} = \frac{b^{11}}{a^8}$

h) $\left(a^2 b\right)^{-2} \cdot \left(a^{-3}\right)^{-2} \cdot b^4 b^{-3} = a^{-4} b^{-2} \cdot a^6 \cdot b = a^2 b^{-1} = \frac{a^2}{b}$

Pedagogická poznámka: Náplní zbytku hodiny je samostatné počítání příkladů ze sbírky nebo z Petákové.

Př. 6: Sbírka příklad 6
Sbírka příklad 7 a) b) c)
Sbírka příklad 8 a) b) c) d) e) f) g)

Př. 7: Petáková:
strana 62/cvičení 37 b) f)
strana 62/cvičení 39 b) d) e) f)
strana 62/cvičení 40
strana 62/cvičení 42 a) b) d) e) g)

Shrnutí: Lépe a obecněji se nám počítá, když zavedeme, že platí $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.