1.1.1 Kvadratické rovnice (dosazení do vzorce) I

Předpoklady: základní početní operace

Rovnicí se nazývá vztah rovnosti mezi dvěma výrazy obsahujícími jednu nebo více neznámých. V této kapitole se budeme zabývat pouze kvadratickými rovnicemi s jednou neznámou – označenou například *x*.

Trochu si přiblížíme neznámá slova v předchozích větách:
neznámá, proměnná – znak (většinou písmenko, nejčastěji *x*), který představuje žolíka, na jehož místo můžeme dosazovat různá čísla
výraz – skoro všechno, co dokážeme sestavit z čísel, proměnných a matematických operací, když místo proměnných dosadíme čísla je možné ho spočítat a tak určit jeho hodnotu
rovnice – mezi dva výrazy napíšeme znak rovná se, který znamená, že hodnoty obou mají být stejné
Kvadratická rovnice - každá rovnice, která obsahuje člen s druhou mocninou neznámé (takzvaný kvadratický člen) a neobsahuje žádný člen s vyšší mocninou neznámé.

Př. 1: Urči které rovnice jsou kvadratické:
a) $x^2+3x-15=0$
b) $2x+x\sqrt{2}=\pi^2+3x$
c) $x^3-2x^2=9$
d) $x^2+2x-\sqrt{5}$
e) $(x+1)(x-3)=x$

a) $x^2+3x-15=0 \Rightarrow$ je kvadratická

b) $2x+x\sqrt{2}=\pi^2+3x \Rightarrow$ není kvadratická, neobsahuje druhou mocninu *x* (na druhé mocnině π nezáleží)

c) $x^3-2x^2=9 \Rightarrow$ není kvadratická, obsahuje třetí mocninu (říká se jí kubická, hádej proč)

d) $x^2+2x-\sqrt{5} \Rightarrow$ není kvadratická rovnice, protože neobsahuje znak rovnosti a nejedná se tedy vůbec o rovnici, nýbrž pouze o výraz

e) $(x+1)(x-3)=x \Rightarrow$ je možné upravit roznásobením $x^2-3x+x-3=x \Rightarrow x^2-3x-3=0$ $\Rightarrow$ je kvadratická

Řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ je možné najít pomocí vzorce $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Důležité je pochopit význam písmen *a*, *b* a *c* ve vzorci. Když převedeme všechny členy rovnice na levou stranu zastupuje:

* **písmeno *a*** jsou všechna čísla, kterými je v rovnici násobeno x^2 (v rovnici $x^2 - x - 6 = 0$ je tedy $a = 1$)
* **písmeno *b*** zastupuje všechna čísla, kterými je násobeno x (v rovnici $x^2 - x - 6 = 0$ je $b = -1$)
* **písmeno *c*** zastupuje celý zbytek rovnice – čísla, kterými není násobena žádná mocnina neznámé *x* (v rovnici $x^2 - x - 6 = 0$ je $c = -6$)

Správně rozeznat hodnoty, které máme dosadit do vzorce, je nejdůležitější.

Př. 2: Urči hodnoty koeficientů *a b*, *c* pro kvadratickou rovnici $2x^2 - 3x = 0$.

Platí: $2x^2 - 3x = 2x^2 + (-3)x + 0 = 0$

$a = 2$ (číslo před x^2)
$b = -3$ (číslo před x)
$c = 0$ (číslo, které je samotné)

Pedagogická poznámka: Při vysvětlování významů jednotlivých koeficientů na příkladu rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ nastanou samozřejmě problémy se zápornými čísly. Koeficient $b = -1$ určí většina třídy špatně, u koeficientu $c = -6$ už chybu neudělají. Přesto se při řešení příkladu 2 opět objeví několik výsledků $b = 3$. Těm, kteří tuto chybu udělají se snažím vysvětlit, že se právě ukázala obecná chyba jejich uvažování, kdy nevzali na vědomí, že při předchozím vysvětlování rovnice $x^2 - x - 6 = 0$ sami předpokládali jiný výsledek a nezapamatovali si, že jejich odhad byl špatný.

Př. 3: Urči hodnoty koeficientů *a b*, *c* pro kvadratické rovnice:
a) $(x-2)(x+3) = 2x^2 - 3$
b) $-2x^2 - 3x + \sqrt{2}x - \sqrt{5} = x - 4$

a)
Rovnici musíme převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ roznásobíme a na levé straně vyrobíme 0:
$(x-2)(x+3) = 2x^2 - 3$
$x^2 + 3x - 2x - 6 = 2x^2 - 3$
$-x^2 + x - 3 = 0$
Platí $a = -1;\ b = 1;\ c = -3$.

b)
Rovnici upravíme na tvar s nulovou pravou stranou: $-2x^2 - 3x + \sqrt{2}x - \sqrt{5} = x - 4$
$-2x^2 - 4x + \sqrt{2}x + 4 - \sqrt{5} = 0$
Vytkneme x: $-2x^2 + x\left(\sqrt{2} - 4\right) + 4 - \sqrt{5} = 0$
Z předchozího je jasné, že platí $a = -2;\ b = \sqrt{2} - 4;\ c = 4 - \sqrt{5}$.

Pedagogická poznámka: b) dělá studentům velké problémy, zejména proto, že se snaží odstranit odmocniny. Nepovažují je totiž za dostatečně správná čísla. Je třeba zdůraznit, že odmocniny jsou zcela normální čísla a není nutné, aby k nim měli speciální přístup.

Nepovažuji v tomto okamžiku za reálné, aby všichni studenti ve třídě dokázali tento příklad samostatně vyřešit (vytknutí *x* je pro mnohé poněkud těžké sousto). Přesto v tomto okamžiku neobsahuje učebnice více podobných příkladů, protože se snažím koncentrovat na hlavní cíl hodiny (dosazování). Zní to sice divně, ale říkám to i studentům, že není reálné očekávat, že i Ti, kteří jsou připravení velmi špatně, budou schopni v tomto okamžiku stíhat všechno. Důležité je, aby se naučili samostatně pracovat, postupně se zlepšovali a byli schopni stíhat všechno do kapitoly 1.6. Mocniny.

Př. 4: Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2 - x - 6 = 0$.

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow a = 1; b = -1;\ c = -6$. Teď můžeme dosadit.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu se krásně pozná (pokud vydržíte a opravdu ho neukážete na tabuli), jak byli studenti vedeni k opravdu samostatnému počítání. V jedné ze tříd nedokázal tento příklad spočítat na první pokus nikdo. I přes to, že bylo vidět, že počítají vcelku dobře, všichni udělali při výpočtu nějakou chybičku (někteří už při opisování zadání), kterou neměli při výpočtu možnost opravit podle tabule.
Určitě se projeví všichni, kteří počítat neumějí (a minimálně na naší škole jich přibývá) a je jasné, že není v jejich silách dopočítat zbytek hodiny včas. Přesto považuji za dostačující, když spočítat sami alespoň něco, snažím se jim vysvětlovat, že dohnat cvik ve výpočtech je běh na dlouhou trať a není nic fatálního na tom, že v tomto okamžiku to vypadá beznadějně.
Pokud se následující příklady nestihnou všechny, probírám je v další hodině, kde vynechám příklady z její první části.

Př. 5: Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $-x^2-2x+3=0$
b) $5x^2+9x=2$
c) $2x^2-4x+2=0$
d) $x^2-x=0$
e) $x^2-4=0$
f) $x^2+12x+20=0$

a) $-x^2-2x-3=0 \Rightarrow a=-1; b=-2; c=3$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{2\pm 4}{-2}$$

$$x_1=\frac{2-4}{-2}=1$$

$$x_2=\frac{2+4}{-2}=-3$$

b) Musíme získat na pravé straně nulu.

$5x^2+9x=2$

$5x^2+9x-2=0 \Rightarrow a=5; b=9; c=-2$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot(-2)\cdot 5}}{2\cdot 5}=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{10}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{10}$$

$$x_1=\frac{-9-11}{10}=-2$$

$$x_2=\frac{-9+11}{10}=\frac{1}{5}$$

c) $2x^2-4x+2=0 \Rightarrow a=2; b=-4; c=2$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{+4\pm\sqrt{16-16}}{4}=\frac{+4\pm\sqrt{0}}{4}$$

$$x_1=\frac{+4-0}{4}=1$$

$$x_2=\frac{+4+0}{4}=1$$

Diskriminant (výraz ve vzorci pod odmocninou) je roven nule a rovnice tak má pouze jedno řešení.

d) $x^2-x=0 \Rightarrow a=1; b=-1; c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1-0}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=\frac{1-1}{2}=0$$

$$x_2=\frac{1+1}{2}=1$$

e) $x^2-4=0 \Rightarrow a=1; b=0;\ c=-4$

$$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot(-4)\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{0\pm\sqrt{0+16}}{2}=\frac{0\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{0\pm 4}{2}$$

$$x_1=\frac{0-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{0+4}{2}=2$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý a neměl by se vynechávat. Pětina studentů ho řeší špatně, když stanoví $a=1; b=-4; c=0$.

f) $x^2+12x+20=0 \Rightarrow a=1;\ b=12;\ c=20$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 20\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-12\pm\sqrt{144-80}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-12\pm 8}{2}$$

$$x_1=\frac{-12-8}{2}=-10$$

$$x_2=\frac{-12+8}{2}=-2$$

Pedagogická poznámka: Některé s předchozích příkladů je samozřejmě možné řešit elegantněji vytýkáním. Pokud s tím někdo přijde nebráním mu, pochválím ho, ale trvám, aby si vyzkoušel i dosazení a svůj způsob použil na kontrolu. Třídě tyto způsoby nevysvětluji, snažím nehonit příliš mnoho zajíců najednou.

Shrnutí: Pokud správně určíme koeficienty získáme řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ pomocí vzorce $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.