1.1.16 Rovnoměrně zrychlený pohyb v příkladech II

Předpoklady: 1115

Př. 1: Na letící kámen působí gravitační síla Země a urychluje ho směrem dolů se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$. Jakou rychlostí musíme kámen hodit kolmo vzhůru, aby dopadl za 3,2 s? (předpokládej, že kámen dopadne do stejné výšky z jaké byl hozen)

Dokud kámen leží vzhůru, zrychlení zmenšuje jeho rychlost, jakmile kámen zpomalí na nulovou rychlost, začne ho Země zrychlovat na druhou stranu.
Stoupavá i klesavá fáze trvají stejně dlouho (jak jsme viděli i na pokusu s míčem) $\Rightarrow$ kámen musí stoupat 1,6 s (polovinu doby).

$v = 0\,\mathrm{m/s}$ $\quad t = 1{,}6\,\mathrm{s}$ $\quad a = -10\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad v_0 = ?$

$v = v_0 + at$

$v_0 = v - at = 0 - (-10)\cdot 1{,}6\,\mathrm{m/s} = 16\,\mathrm{m/s}$

Kámen musíme hodit kolmo vzhůru rychlostí 16 m/s.

Pedagogická poznámka: Fakta uvedená v předchozím příkladu, můžete snadno dokumentovat na grafu skákajícího míče z hodiny 1112. Pokud si studenti všimnou, že stoupání a klesání se zcela neshodují, přiznejte, že pohyb je trochu ovlivněný odporem vzduchu.

Př. 2: Automobil se pohybuje rychlostí 80 km/h. Urči jeho brzdnou dráhu (dráhu, kterou urazí než se zastaví), pokud může dosáhnout maximálního zpomalení $8{,}4\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 80\,\mathrm{km/h} = 22{,}2\,\mathrm{m/s}$ $\quad v = 0$ $\quad a = -8{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad s = ?$

$v = v_0 + at$

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $\Rightarrow$ na výpočet dráhy ze druhé rovnice potřebujeme čas, ten můžeme vypočítat z první rovnice

$v - v_0 = at \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a}$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2vv_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2 - 22{,}2^2}{2(-8{,}4)}\,\mathrm{m} = 29{,}4\,\mathrm{m}$$

Auto zastaví na dráze 29,4 m.

Při příkladu s kamenem jsme si řekli, že část pohybu, kdy jej Země zastavuje (a on stoupá nahoru) je rovnocenná s částí pohybu, kdy jej Země urychluje (a on padá dolů). V předchozím příkladu byly vzorce poměrně složité i kvůli tomu, že se v obou rovnicích vyskytovaly členy s v_0. Bez nich by byly vzorce podstatně jednodušší. Zkusíme místo předchozího příkladu spočítat analogický příklad o zrychlování (u něj bude počáteční rychlost nulová a vzorce jednodušší).

Př. 3: Vymysli analogický příklad o zrychlování k předchozímu příkladu. Příklad vyřeš a srovnej řešení.

Stojící automobil na zrychlit na rychlost 80 km/h. Urči jakou dráhu při tom ujede, pokud může dosáhnout maximálního zrychlení $8,4\,\mathrm{m/s^2}$.

$v = 80\,\mathrm{km/h} = 22,2\,\mathrm{m/s}$ $\quad v_0 = 0$ $\quad a = 8,4\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad s = ?$

použijeme jednodušší vzorce bez členů s počáteční rychlostí (je nulová)

$v = at$

$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ na výpočet dráhy ze druhé rovnice potřebujeme čas, ten můžeme vypočítat

z první rovnice: $v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{22,2^2}{2\cdot 8,4}\,\mathrm{m} = 29,4\,\mathrm{m}$$

Auto zastaví na dráze 29,4 m.

Oba příklady vyšly stejně $\Rightarrow$ **příklady na zpomalování můžeme řešit pomocí analogií pro zrychlování**.

Př. 4: Osobní vlak může dosáhnout maximálního zpomalení $4\,\mathrm{m/s^2}$. Urči nejvyšší rychlost, ze které ještě vlak dokáže zastavit na dráze 60 m. Příklad řeš pomoci analogického zrychleného pohybu.

Analogický zrychlený pohyb: Jaké nejvyšší rychlosti může dosáhnout vlak, který se rozjíždí se zrychlením $4\,\mathrm{m/s^2}$ na dráze 60 m?

$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ $\quad s = 60\,\mathrm{m}$ $\quad a = 4\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad v = ?$

Rovnice rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí:

$v = at$ $\qquad s = \frac{1}{2}at^2$

Z první rovnice vyjádříme *t* a dosadíme ho do druhé:

$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} = \frac{v^2}{2a}$$

$2as = v^2$

$$v = \sqrt{2sa} = \sqrt{2\cdot 60\cdot 4}\,\mathrm{m/s} = 21,9\,\mathrm{m/s} = 78,9\,\mathrm{km/h}$$

Vlak může zastavit na dráze 60 m z rychlosti 79 km/h.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady je možné řešit analogií stejně jako příklad předchozí, nechávám volbu metody na studentech.

Př. 5: Vlak metra jedoucí rychlostí 50 km/h brzdí do úplného zastavení přibližně za 5 sekund. Jak daleko před místem zastavení musí řidič začít brzdit?

$v_0 = 50\,\text{km/h} = 13,9\,\text{m/s}$ $\quad t = 5\,\text{s}$ $\quad v = 0\,\text{m/s}$ $\quad s = ?$

Vzdálenost, ve které musí řidič začít brzdit je rovna dráze, kterou urazí vlak do zastavení.

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ neznáme zrychlení, musíme jej vyjádřit z rovnice pro rychlost:

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}\left(-\frac{v_0}{t}\right)t^2 = v_0 t - \frac{1}{2}v_0 t$$

$$s = \frac{1}{2}v_0 t$$

$$s = \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}13,9 \cdot 5\,\text{m} = 35\,\text{m}$$

Řidič musí začít brzdit 35 m před místem, kde má zastavit.

Př. 6: Urči zrychlení auta, které z rychlosti 90 km/h zastaví na dráze 50 m.

$v_0 = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$ $\quad v = 0\,\text{m/s}$ $\quad s = 50\,\text{m}$ $\quad$ a $a = ?$

Je to stejné jako v předchozím příkladě. Jde o rovnoměrně zrychlený pohyb. Nemohu přímo dosadit ani do jedné z rovnic, protože v obou neznám dvě veličiny. Takže si z rovnice pro rychlost vyjádřím čas a dosadím za něj do druhé rovnice.

$$v = v_0 + at$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$s = \frac{vv_0 - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2as = 2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{0^2 - 25^2}{2 \cdot 50}\,\text{m/s}^2 = -6,25\,\text{m/s}^2$$

Auto brzdí se zrychlením $a = -6,25\,\text{m/s}^2$

Pedagogická poznámka: Hodinu je třeba naplánovat tak, aby studenti měli minimálně 15 minut na následující příklad. Je v podstatě první, který se neobejde bez dosazování do kompletních rovnic a tedy bez poměrně obtížného počítání.

Př. 7: Řidič jedoucí rychlostí 90 km/h začal brzdit 50 m před značkou označující začátek vesnice. Jaké musí být zrychlení automobilu, aby se mu podařilo snížit rychlost na povolených 50 km/h než projede kolem značky?

$v_0 = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$ $\quad v = 50\,\text{km/h} = 13{,}9\,\text{m/s}$ $\quad s = 50\,\text{m}$ $\quad a = ?$

Rovnoměrně zpomalený pohyb, nenulové jsou obě rychlosti $\Rightarrow$ musíme použít kompletní rovnice, z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme ho do druhé

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; v - v_0 = at \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$s = \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{2a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$2as = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{13{,}9^2 - 25^2}{2 \cdot 50}\,\text{m/s}^2 = -4{,}3\,\text{m/s}^2$$

Řidič musí brzdit se zrychlením $-4{,}3\,\text{m/s}^2$

Pedagogická poznámka: Studenti poměrně často zapomínají u předchozího příkladu dosazovat za t také ve členu $v_0 t$.

Shrnutí: Rovnoměrně zpomalené pohyby s nulovou konečnou rychlostí (do zastavení) můžeme snadněji řešit pomocí analogických rovnoměrně zrychlených pohybů s nulovou počáteční rychlostí (a tedy jednoduššími rovnicemi).