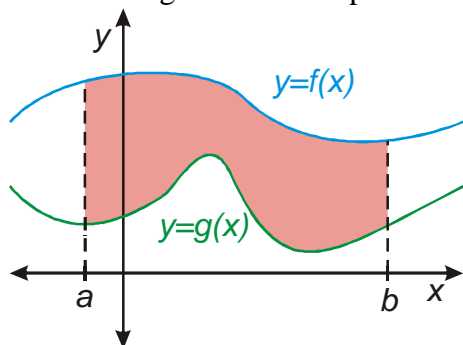


10.3.14 Výpočet plochy obrazce II

Předpoklady: 10313

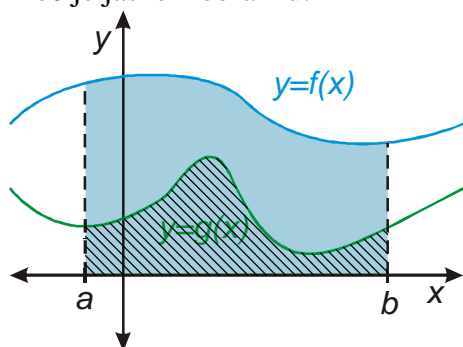
Pomocí integrálů můžeme počítat i obsahy ploch, které nejsou vůbec ohraničovány osou x .



Obsah červené plochy na obrázku určíme pomocí integrálu takto:

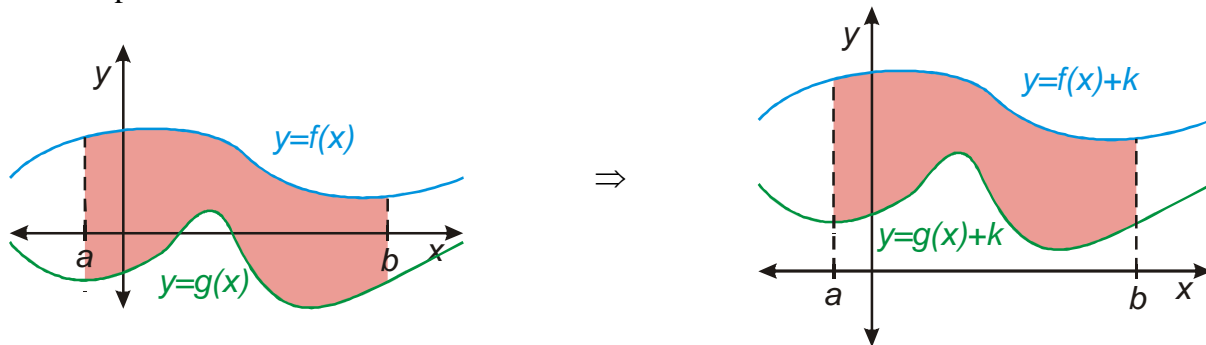
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Proč je jasné z obrázku:



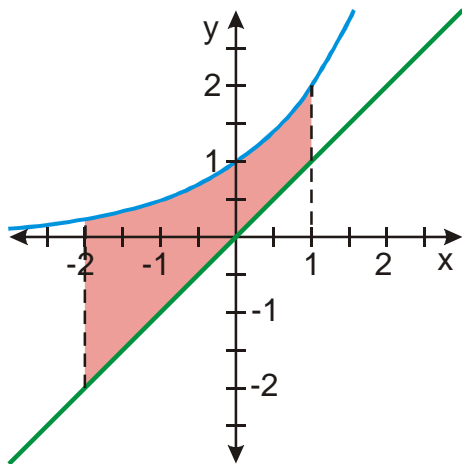
- Modrá plocha $S = \int_a^b f(x) dx$
- Šrafovaná plocha $S = \int_a^b g(x) dx$

Vzorec platí i v případě, že alespoň jedna z funkcí nabývá záporných hodnot, protože přičtením vhodné konstanty k oběma funkcím se plocha mezi křivkami nezmění, pouze se obrázek posune dostatečně nahoru



Př. 1: Urči obsah rovinného obrazce, který ohraničují křivky $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.

Nakreslíme si přibližné tvary grafů obou funkcí:

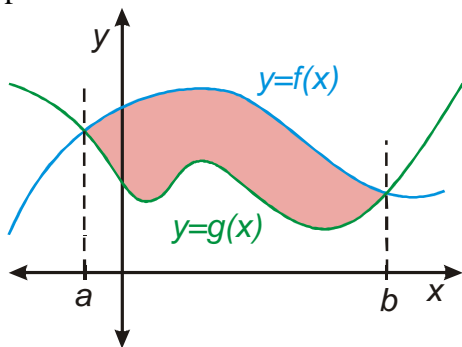


Obsah plochy:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 (2^x - x) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{\ln 2} (2^1 - 2^{-2}) - \frac{1}{2} [1^2 - (-2)^2] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} (-3) = \frac{3}{4 \ln 2} + \frac{3}{2}$$

V mnoha případech se v zadání přímo neudávají meze, protože ohraničenou plochu omezuje přímo tvar křivek:

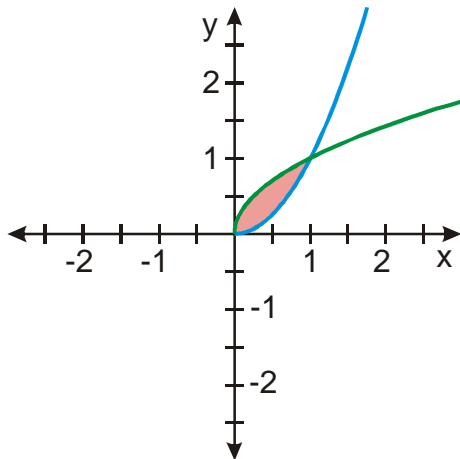


Př. 2: Urči obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:

a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ b) $y = x^2 - 3$, $y = 2x$

a) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

Obě funkce procházejí body $[0;0]$ a $[1;1]$.



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}) - \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

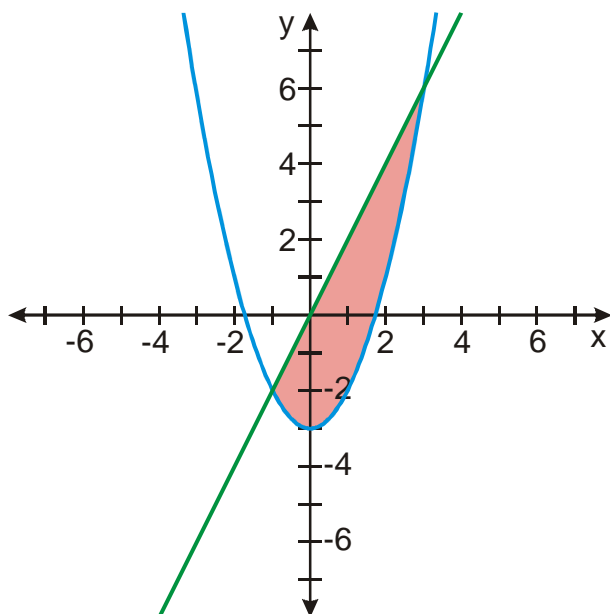
b) $y = x^2 - 3$, $y = 2x$

Nejdříve určíme meze integrálu, tedy společné body grafů obou funkcí:

$$x^2 - 3 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

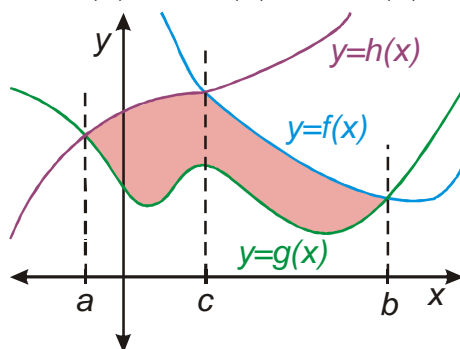
\Rightarrow oba grafy se protínají v bodech $[-1; -2]$ a $[3; 6]$



$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^3 [2x - (x^2 - 3)] dx = \int_{-1}^3 (2x - x^2 + 3) dx = \\
 &= \left[2 \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^3 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 + [3x]_{-1}^3 = [3^2 - (-1)^2] - \left[\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] + [3 \cdot 3 - 3(-1)] = \\
 &= (9 - 1) - \left(9 + \frac{1}{3} \right) + (9 + 3) = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

Pokud je útvar ohraničen větším počtem křivek rozdělíme počítání integrálu na více částí podobně jako v minulé hodině, když křivka protínala osu x a části obrazce se vyskytovali střídavě nad i pod osou x .

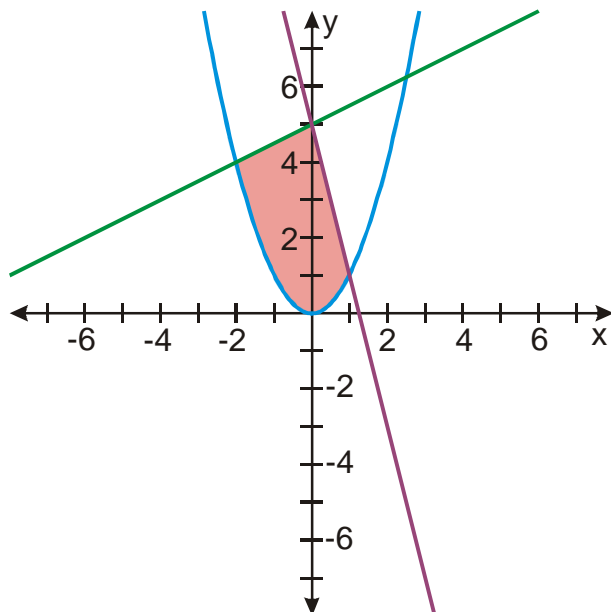
Př. 3: Zapiš obecný vztah pro výpočet plochy vyznačené na obrázku ohraničené funkcemi $y = f(x)$, $y = g(x)$ a $y = h(x)$.



$$S = \int_a^c [h(x) - g(x)] dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] dx$$

Př. 4: Vypočti obsah útvaru, který je zespodu ohraničen křivkou $y = x^2$ a seshora přímkami funkcí $y = 0,5x + 5$ a $y = -4x + 5$.

Nakreslíme si obrázek situace:



Hledáme průsečíky:

funkce $y = x^2$ a $y = 0,5x + 5 \Rightarrow x^2 = 0,5x + 5$

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{1-9}{4} = -2 \text{ - tento bod nás zajímá}$$

funkce $y = x^2$ a $y = -4x + 5 \Rightarrow x^2 = -4x + 5$

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$$

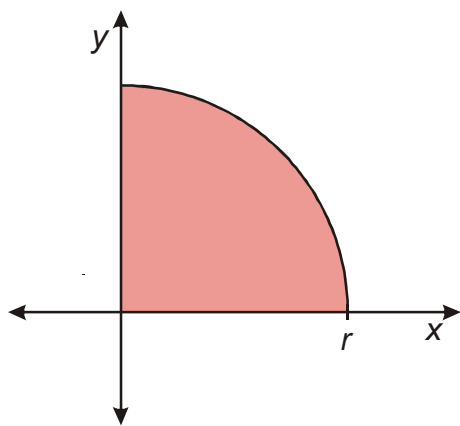
$$x_1 = -5 \quad x_2 = 1 \text{ - tento bod nás zajímá}$$

\Rightarrow pro obsah útvaru platí:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 [(0,5x+5) - x^2] dx + \int_{-2}^1 [(5-4x) - x^2] dx = \int_{-2}^0 (0,5x+5-x^2) dx + \int_{-2}^1 (5-4x-x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + 5[x]_{-2}^0 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 + 5[x]_{-2}^1 - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right] + 5[0 - (-2)] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right] + 5(1-0) - 4 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \\ &= -1 + 10 - \left(\frac{8}{3} \right) + 5 - 2 - \frac{1}{3} = 9 \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad nemohou studenti samozřejmě počítat samostatně. Je zařazen spíše jako ukázka toho, jak se počítají trochu těžší integrály.

Př. 5: Odvoď pomocí integrálu vztah pro obsah kruhu r .



Rovnice kružnice s poloměrem r a středem v bodě $S[0;0]$: $x^2 + y^2 = r^2$

Upravíme do tvaru předpisu funkce: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Obsah plochy: $S = \int_0^r f(x) dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ - takový integrál spočítat neumíme

Trik: substituce $x = r \sin t$ (zdánlivě obrácený postup než normálně – substitucí si výraz zesložitějeme) $\Rightarrow dx = r \cos t dt$

ještě musíme změnit meze:

- $x = 0 = r \sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$
- $x = r = r \sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^r f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

Použijeme vzorec pro poloviční úhel: $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

$$S = \int_0^r f(x) dx = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{r^2}{2} [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{r^2}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi r^2}{4}$$

Spočtený obsah je pouze čtvrtinou obsahu celého kruhu \Rightarrow obsah kruhu je dán vzorce

$$S = \pi r^2.$$

Př. 6: Petáková:
 strana 166, cvičení 103 f) k) l)
 strana 166, cvičení 107 b)

Shrnutí: