10.3.8 Integrování substituční metodou III

Předpoklady: 10307

Pedagogická poznámka: Oba dva obecné integrály jsou pro studenty velkým oříškem. Dost špatně chápu už jenom to, co se po nich chce. Nemá cenu čekání příliš prodlužovat a radši je společně spočítat na tabuli.

Př. 1: Vypočti $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

Zkusíme substituci (integrál obsahuje derivaci $f(x)$)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$

Př. 2: Vypočti $\int f(ax+b)\,dx$

Derivaci funkce $f(ax+b)$ v integrálu nemáme $\Rightarrow$ můžeme substituovat pouze $t = ax+b$:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$t = ax+b \Rightarrow dt = a\,dx$

Př. 3: Vypočti:

a) $\int \frac{\cos x}{3\sin x + 1}\,dx$ b) $\int \cos x\sqrt{3-2\sin x}\,dx$

a) $$\int \frac{\cos x}{3\sin x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos x}{3\sin x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3\sin x + 1| + C$$

$t = 3\sin x + 1 \Rightarrow dt = 3\cos x\,dx$

$$\int \cos x\sqrt{3-2\sin x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{3-2\sin x}\cdot(-2)\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

b) $t = 3 - 2\sin x \Rightarrow dt = -2\cos x\,dx$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(3-2\sin x)^3} + C$$

Pedagogická poznámka: Všechny následující příklady vyžadují kromě zvládnuté substituční metody i nápad. Nenechávám třídu příliš dlouho čekat, raději si příklad rozebereme a pak počítáme.

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \operatorname{tg} x \, dx$ b) $\int \sin^3 x \, dx$

a) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

zdá se, že tento integrál ani nevede na substituci, obsahuje jedinou funkci

na substituci musí integrál obsahovat součin dvou funkcí: funkce a její derivace $\Rightarrow$ přepíšeme na tvar: $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ $\Rightarrow$ funkce před dx hraje roli derivace $\Rightarrow$ substituce $t = \cos x$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-1)\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

b) $\int \sin^3 x \, dx$

podobný problém jako v předchozím případě $\Rightarrow$ musíme uvnitř integrálu vytvořit součin dvou funkcí

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx = \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx =$$

druhý integrál spočítáme zvlášť pomocí substituce:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\int \cos^2 x \cdot (-1) \sin x \, dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

Dosadíme:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\cos x - \left(-\frac{\cos^3 x}{3} \right) + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

Př. 5: Vypočti:

a) $\int \operatorname{cotg} 2x \, dx$ b) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx$

a) $\int \operatorname{cotg} 2x \, dx$

Zřejmě budeme muset použít substituci dvakrát:

$$\int \operatorname{cotg} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{cotg} 2x \, 2dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{cotg} y \, dy = \frac{1}{2} \int \frac{\cos y}{\sin y} dy =$$

$y = 2x \Rightarrow dy = 2\,dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|\sin y| + C = \frac{1}{2} \ln|\sin 2x| + C$$

$t = \sin y \Rightarrow dt = \cos y \, dy$

b) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx$

Nejdříve si integrál opět upravíme:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \cdot \sin x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx$$

získali jsme součet dvou integrálů, které již umíme spočítat:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\int \cos^2 x \cdot (-1) \sin x \, dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

$$\int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = -\int \cos^4 x \cdot (-1) \sin x \, dx = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

Dosadíme:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} - \left(-\frac{\cos^5 x}{5} \right) + C =$$

$$= \frac{\cos^5 x}{5} - -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Př. 6: Petáková:
strana 164/cvičení 89 h) k) l)

Shrnutí: