2.2.9 Derivace funkcí (shrnutí)

Předpoklady: 2207, 2208

Pedagogická poznámka: Hodina by měla probíhat jako zcela samostatná práce studentů. Kromě kontroly projektorem nosím na tuto hodinu do třídy i několik papírů s výsledky, aby si mohli kontrolovat i Ti, kteří postupují rychleji než zbytek třídy. Není příliš pravděpodobné, že by někdo dokázal spočítat všechny příklady. Jsou řazeny přibližně podle obtížnosti, schválně jsou míchány dohromady příklady na použití různých metod.
Tato hodiny je jinak přehlídkou různých hrůz a šíleností, které se však ani tak netýkají derivací jako spíš úprav mocnin a zlomků, tedy věcí, které studenti měli dávno umět.
Je zajímavé, že ani zdůrazňování dobré rady, aby se studenti vyhýbali vzorcům na součin a podíl nezabrání tomu, aby je většina z nich použila, protože si tím sice zkomplikují výpočet, ale vyhnou se použití pravidel, která jsou probrána před delší dobou.

Ještě než začneme derivovat, shrneme si, co vše máme k dispozici:
Derivace elementárních funkcí:

y	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
y'	$n\cdot x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln a}$

Vzorce pro početní operace:

$(u+v)'=u'+v'$ $\qquad$ $(u-v)'=u'-v'$ $\qquad$ $(uv)'=u'v+uv'$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Vzorec pro derivaci složené funkce:

$$\left[y(z(x))\right]'=y'(z)\cdot z'(x)$$

Dobré rady: Vyhýbat se vzorcům pro součin a podíl krácením, trháním zlomků a spojováním mocnin.

S tímto arzenálem můžeme derivovat téměř jakoukoli rozumnou funkci.

Př. 1: Urči derivace:

a) $\left(x^3-2\sin x\right)'$ $\qquad$ b) $\left(\frac{4}{x^3}\right)'$ $\qquad$ c) $\left(2^x+\sqrt{x^3}\right)'$ $\qquad$ d) $\left(3\ln x-\operatorname{tg} x\right)'$

a) $\left(x^3-2\sin x\right)'=3x^2-2\cos x'$ $\qquad$ b) $\left(\frac{4}{x^3}\right)'=\left(4x^{-3}\right)'=4\cdot(-3)x^{-4}=-\frac{12}{x^4}$

c) $\left(2^x+\sqrt{x^3}\right)'=2^x\ln 2+\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=2^x\ln 2+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=2^x\ln 2+\frac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $\left(3\ln x-\operatorname{tg} x\right)'=3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}$

Př. 2: Urči derivace:

a) $\left(x\cdot\log_3 x\right)'$ b) $\left(x\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)'$ c) $\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)'$ d) $\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)'$

a) $\left(x\cdot\log_3 x\right)' = x'\log_3 x + x\left(\log_3 x\right)' = \log_3 x + x\frac{1}{x\ln 3} = \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}$

b) $\left(x\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^1\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

c) $\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)' = \left(\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}\right)' = (x-2)' = 1$

d) $\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)' = \frac{\left(x^2+4\right)'(x+2)-\left(x^2+4\right)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2)-\left(x^2+4\right)}{(x+2)^2} =$

$= \frac{2x^2+4x-x^2-4}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$

Př. 3: Urči derivace:

a) $\left(x^3-2x^2+3\right)'$ b) $\left(\frac{1}{x^3-2x^2+3}\right)'$ c) $\left[\frac{\sqrt{x}\left(2x-\sqrt[3]{x^4}\right)}{\sqrt[3]{x}}\right]'$

a) $\left(x^3-2x^2+3\right)' = 3x^2-2\cdot 2x+0 = 3x^2-4x$

b) $\left(\frac{1}{x^3-2x^2+3}\right)' = \left[\left(x^3-2x^2+3\right)^{-1}\right]' = -\frac{1}{\left(x^3-2x^2+3\right)^2}\left(x^3-2x^2+3\right)' = -\frac{3x^2-4x}{\left(x^3-2x^2+3\right)^2}$

c) $\left[\frac{\sqrt{x}\left(2x-\sqrt[3]{x^4}\right)}{\sqrt[3]{x}}\right]' = \left[\frac{2x\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right]' = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{11}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right]' = \left[2x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}-x^{\frac{11}{6}-\frac{1}{3}}\right]' =$

$= \left(2x^{\frac{7}{6}}-x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Př. 4: Urči druhé derivace funkcí:

a) $y = x^3-2x^2+3$ b) $y = x^2\cdot e^x$ c) $y = \log_2 x^2$

Výpočet provedeme postupně ve dvou krocích:

a) $y = x^3-2x^2+3$

$y' = \left(x^3-2x^2+3\right)' = 3x^2-4x$

$y'' = \left(3x^2 - 4x\right)' = 6x - 4$

b) $y = x^2 \cdot e^x$

$y' = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2\right)' e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x$

$y'' = \left(2xe^x + x^2e^x\right)' = \left(2x\right)' e^x + 2x\left(e^x\right)' + \left(x^2\right)' e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x =$
$= 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$

c) $y = \log_2 x^2$

$y' = \left(\log_2 x^2\right)' = \frac{1}{x^2}\ln 2\left(x^2\right)' = \frac{\ln 2}{x^2} \cdot 2x = \frac{2 \cdot \ln 2}{x}$

$y'' = \left(\frac{2 \cdot \ln 2}{x}\right)' = -\frac{2 \cdot \ln 2}{x^2}$

Př. 5: Urči derivace:

a) $\left(x^2 e^{\sin x}\right)'$ b) $\left(\frac{\sin x^2}{x^2+1}\right)'$ c) $\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 2x}}\right)'$

a) $\left(x^2 e^{\sin x}\right)' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2\left(e^{\sin x}\right)' = 2x \cdot e^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x$

b) $\left(\frac{\sin x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(\sin x^2\right)'\left(x^2+1\right) - \sin x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\cos x^2 \cdot 2x\left(x^2+1\right) - \sin x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

c) $\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 2x}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 2x}}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)' =$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 2x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}\left(x^2 + 2x\right)'\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 2x}}} \cdot \left(1 + \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}}\right)$

Př. 6: Urči derivace:

a) $\left(e^{\sin x \cdot x}\right)'$ b) $\left[\sin\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\right]'$ c) $\left(\frac{1}{\sin^2\left(2x\right) + x^2 - 1}\right)'$

a) $\left(e^{\sin x \cdot x}\right)' = e^{\sin x \cdot x}\left(\sin x \cdot x\right)' = e^{\sin x \cdot x}\left[\left(\sin x\right)' \cdot x + \sin x\left(x\right)'\right] = e^{\sin x \cdot x}\left(\cos x \cdot x + \sin x\right)$

b) $\left[\sin\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\right]' = \cos\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)' = \cos\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\left[\frac{\left(x^2+1\right)'\left(2+x\right) - \left(x^2+1\right)\left(2+x\right)'}{\left(2+x\right)^2}\right] =$
$= \cos\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\frac{2x\left(2+x\right) - \left(x^2+1\right)}{\left(2+x\right)^2} = \cos\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{\left(2+x\right)^2} = \cos\left(\frac{x^2+1}{2+x}\right)\frac{x^2 + 4x - 1}{\left(2+x\right)^2}$

c)

$$\left(\frac{1}{\sin^2(2x)+x^2-1}\right)' = -\frac{1}{\left[\sin^2(2x)+x^2-1\right]^2}\left[\sin^2(2x)+x^2-1\right]' =$$

$$= -\frac{1}{\left[\sin^2(2x)+x^2-1\right]^2}\left[2\sin(2x)\left(\sin[2x]\right)' + 2x\right] =$$

$$= -\frac{1}{\left[\sin^2(2x)+x^2-1\right]^2}\left[2\sin(2x)\cos(2x)(2x)' + 2x\right] =$$

$$= -\frac{1}{\left[\sin^2(2x)+x^2-1\right]^2}\left[2\sin(2x)\cos(2x)\cdot 2 + 2x\right]$$

Shrnutí: