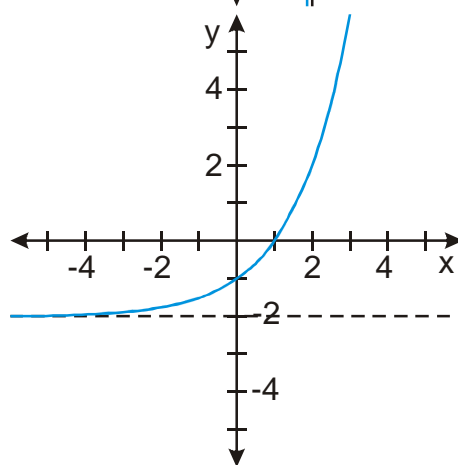
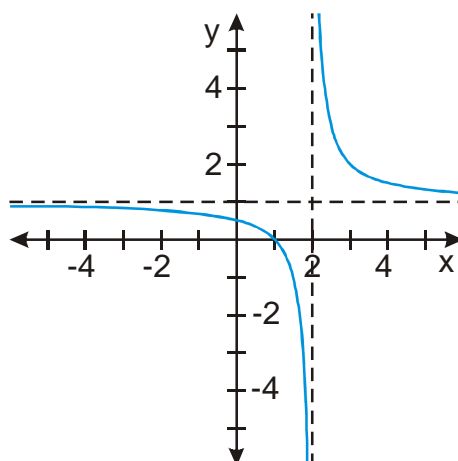
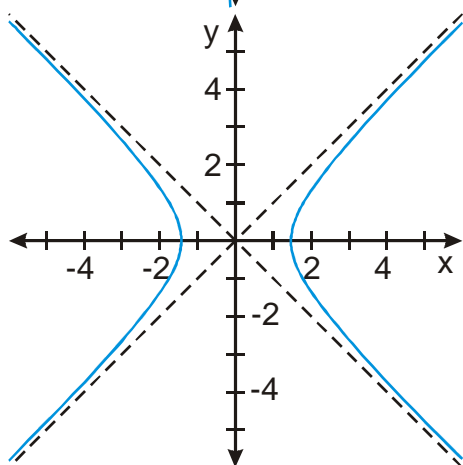
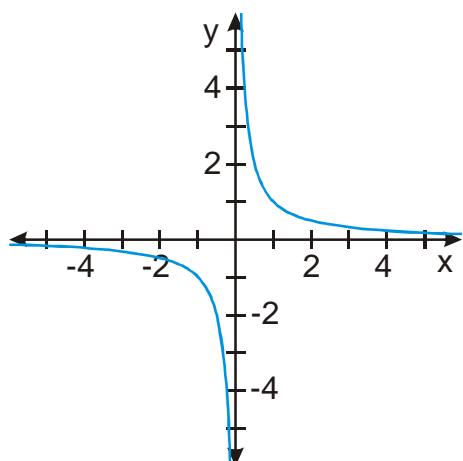


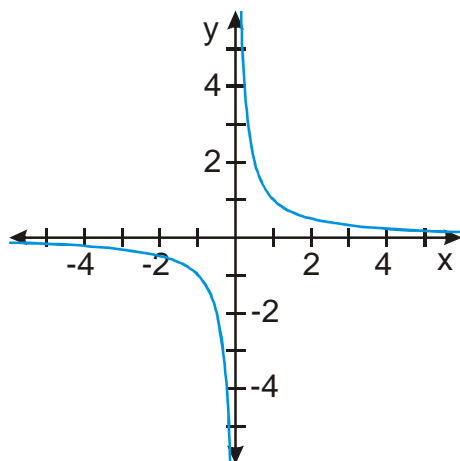
10.1.13 Asymptoty grafu funkce

Předpoklady: 1110, 1111

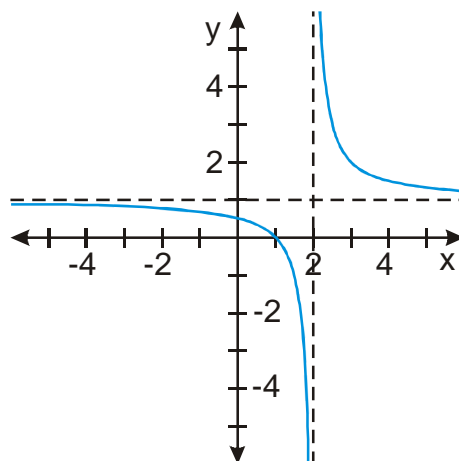
Asymptoty grafu už známe – kreslili jsme si je jako přímky, ke kterým se graf funkce přibližuje. Nakreslení asymptot, pak umožňuje přesnější kreslení grafu. Například u hyperbol jsme kreslili asymptoty jako první.

Př. 1: Najdi na grafech následujících funkcí asymptoty. Asymptoty je možné rozdělit do dvou skupin. Zkus takové dělení vymyslet a asymptoty do dvou skupin rozdělit.

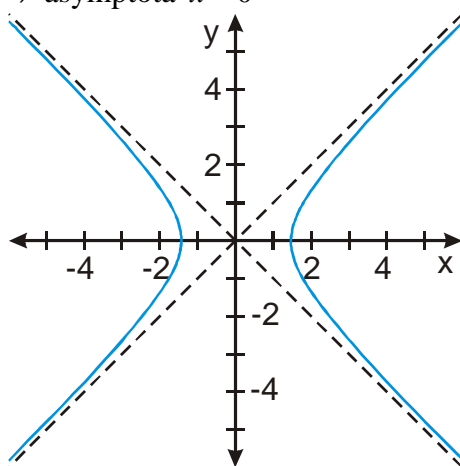




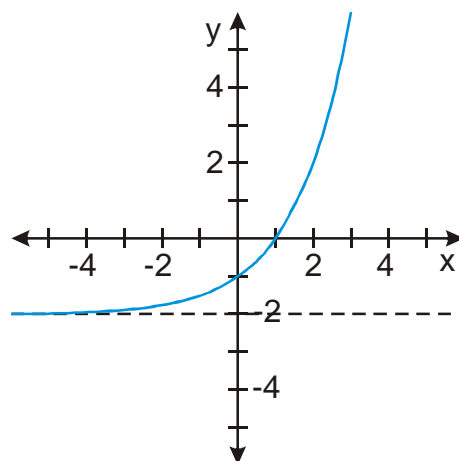
pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují nule \Rightarrow asymptota $y=0$
 pro x jdoucí k 0 se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty \Rightarrow$ asymptota $x=0$



pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují $1 \Rightarrow$ asymptota $y=1$
 pro x jdoucí k 2 se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty \Rightarrow$ asymptota $x=2$



na obrázku není graf funkce
 pro x jdoucí k $\pm\infty$ se hodnoty funkce přibližují $\pm\infty \Rightarrow$ asymptoty $y=\pm x$



pro x jdoucí k $-\infty$ se hodnoty funkce přibližují $-2 \Rightarrow$ asymptota $y=-2$

Asymptoty bychom mohli roztrždit do dvou skupin:

- asymptoty, ke kterým se graf funkce blíží, když se x blíží k $\pm\infty$. Tyto asymptoty jsou přímky vodorovné nebo šikmé, vždy jde o graf lineární funkce \Rightarrow **asymptoty se směrnicí grafu funkce f**
- asymptoty, ke kterým se graf funkce blíží, když se x blíží k nějakému číslu a . Tyto asymptoty jsou svislé přímky dané rovnicí $x=a \Rightarrow$ **asymptoty bez směrnice grafu funkce f**

Pedagogická poznámka: Studentům činí problém nalézt třídící kritérium. Myslím, že nemá cenu hledání příliš prodlužovat.

Asymptoty bez směrnice grafu funkce f

- jsou vždy kolmé na osu $x \Rightarrow$ s grafem funkce se nikdy neprotínají
- graf funkce se k nim blíží, když se hodnoty proměnné x blíží k nějakému číslu a

Definice:

Necht' je funkce definována v $\mathbf{R}_\delta(a)$ (případně v $\mathbf{R}_\delta^+(a)$ nebo $\mathbf{R}_\delta^-(a)$). Přímka o rovnici $x = a$ se nazývá **asymptota bez směrnice grafu funkce f** , právě když má funkce f v bodě a aspoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

Jak najdeme asymptoty bez směrnice pro funkce f ?

Stačí když najdeme body, kde má funkce nevlastní limity ve vlastním bodě (většinou body, kde není definována).

Př. 2: Najdi asymptoty bez směrnice pro funkci $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Hledáme body, kde funkce není definována (tam je šance na nevlastní limitu ve vlastním bodě a tím i asymptotu bez směrnice).

Funkce obsahuje zlomek \Rightarrow jmenovatel musí být různý od nuly

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x \neq -2, x \neq 2$$

$$D(f) = \mathbf{R} - \{-2; 2\}$$

- zjišťujeme $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4}$:

$$\text{Zkusíme } x = 2,01: y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{2,01^3}{2,01^2 - 2^2} \Rightarrow \text{kladná čísla dělíme velmi malými}$$

$$\text{kladnými čísly} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty \Rightarrow \text{funkce má asymptotu bez směrnice } x = 2$$

(limitu z druhé strany nemá cenu zjišťovat)

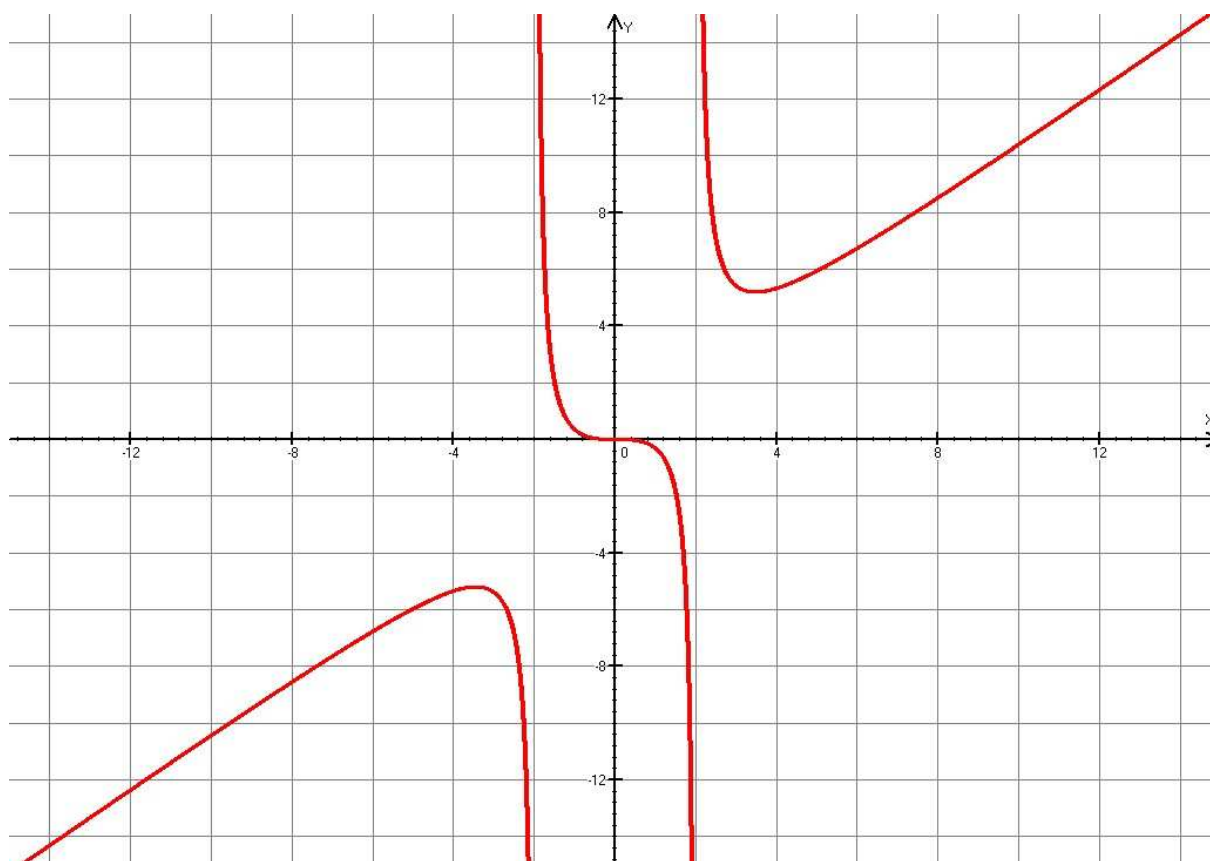
- zjišťujeme $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4}$:

$$\text{Zkusíme } x = -1,99: y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{(-1,99)^3}{(-1,99)^2 - 2^2} \Rightarrow \text{záporná čísla dělíme zápornými}$$

$$\text{čísla s malou absolutní hodnotou} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty \Rightarrow \text{funkce má asymptotu bez}$$

směrnice $x = -2$ (limitu z druhé strany nemá cenu zjišťovat)

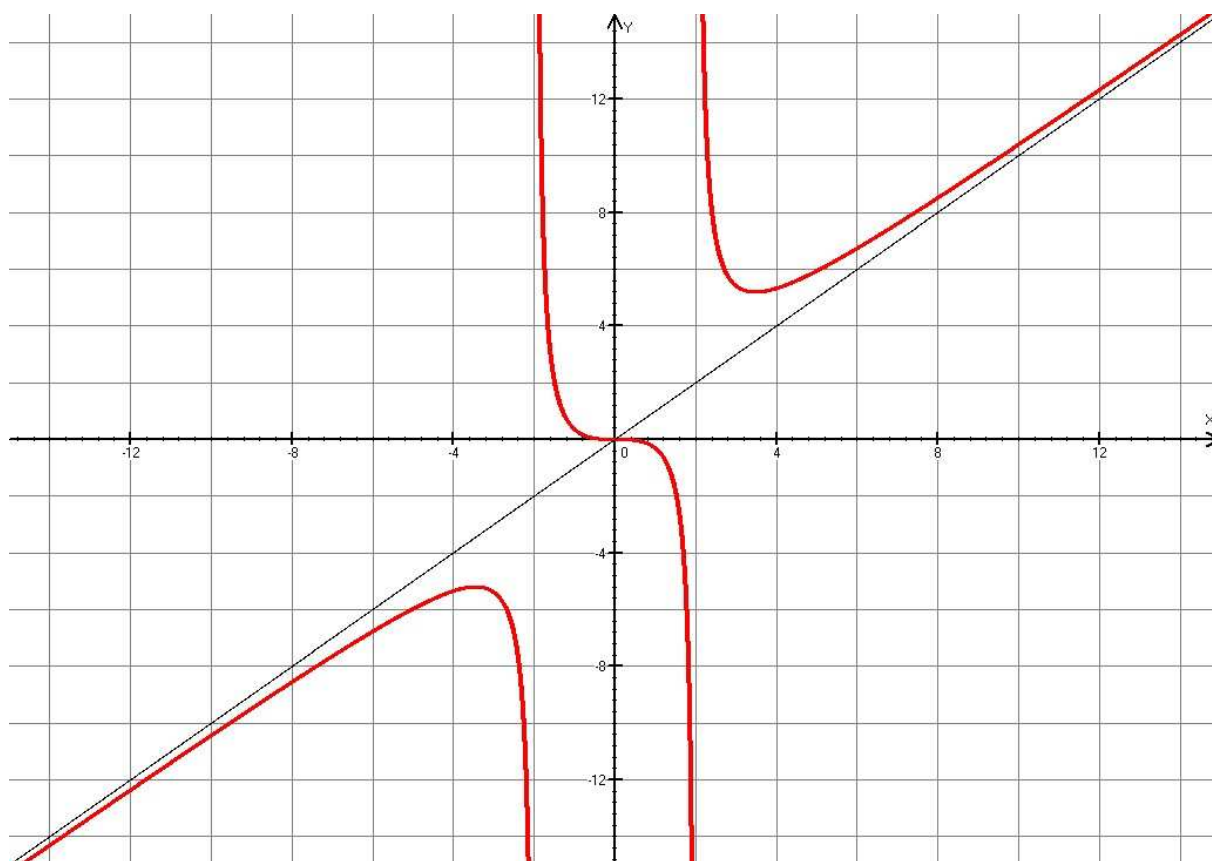
Výsledek si můžeme ověřit pomocí grafu nakresleného počítačem:



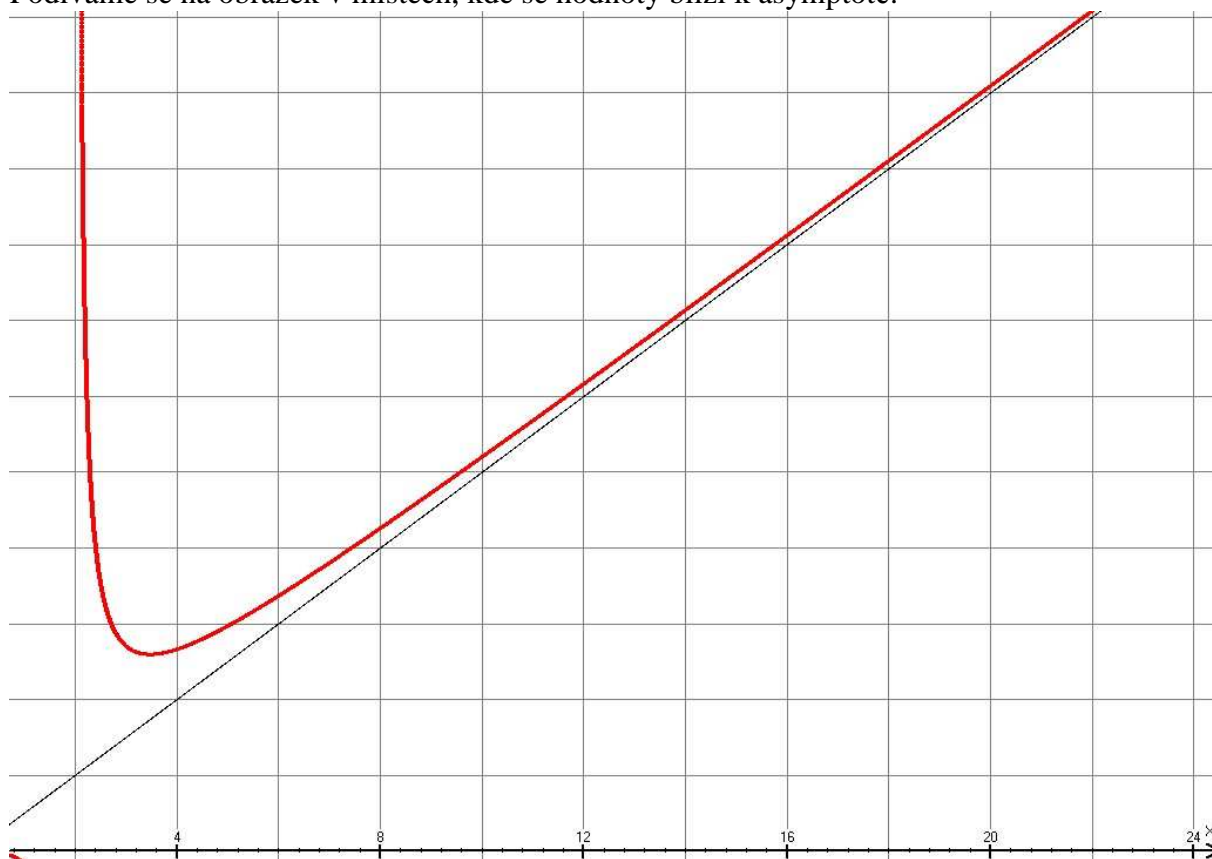
Př. 3: Prostuduj obrázek grafu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ a rozhodni zda má funkce asymptotu se směrnicí. Odhadni její rovnici.

Z obrázku se zdá, že graf funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ se pro x blížící se k $\pm\infty$ chová podobně jako přímka $y = x$.

Přidáme do obrázku funkci $y = x$:



Zdá se, že jsme se trefili. Jak přesně definovat asymptotu se směrnicí pro funkci?
Podíváme se na obrázek v místech, kde se hodnoty blíží k asymptotě:



Jak se pozná, že se funkce blíží k asymptotě?

S rostoucím x se zmenšuje rozdíl mezi hodnotou funkce a hodnotou asymptoty $f(x) - (ax + b)$.

Podobně jako u limity musíme zajistit, aby asymptota byla pro funkci „nejbližší“ přímkou \Rightarrow vzdálenost mezi grafem a přímkou musí jít k nule: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

\Rightarrow **Definice:**

Přímku $y = ax + b$ nazýváme **asymptotou se směrnicí grafu funkce f , jestliže**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ nebo } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Jak určíme asymptotu nějaké funkce (tedy hodnoty koeficientů a a b)?

Definice: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ není úplně ideální (ve výrazu jsou oba koeficienty, což je na určení koeficientů z jedné rovnice příliš mnoho).

vydělíme limitu číslem x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{ax}{x} + \frac{b}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a + \frac{b}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a + 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a - \text{ted' už máme vztah pro koeficient } a$$

Jakmile určíme koeficient a můžeme určit koeficient b z původní limity

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] - \lim_{x \rightarrow +\infty} b = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

Rovnici asymptoty $y = ax + b$ určíme ve dvou krocích:

- $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

Př. 4: Urči pomocí předchozího postupu asymptotu funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - 4 \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 4} - \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-4x}{x^2 - 4} \right] =$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

Limity pro $x \rightarrow -\infty$ počítat nebudeme, vyšly by stejně \Rightarrow asymptotou funkce $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ je přímka $y = x$.

Pedagogická poznámka: Následující příklady při hodině spíše nestihneme, každopádně je studenti mají doma k nahlédnutí.

Př. 5: Urči asymptoty funkce $y = \frac{3x^2 + 2x}{x + 2}$.

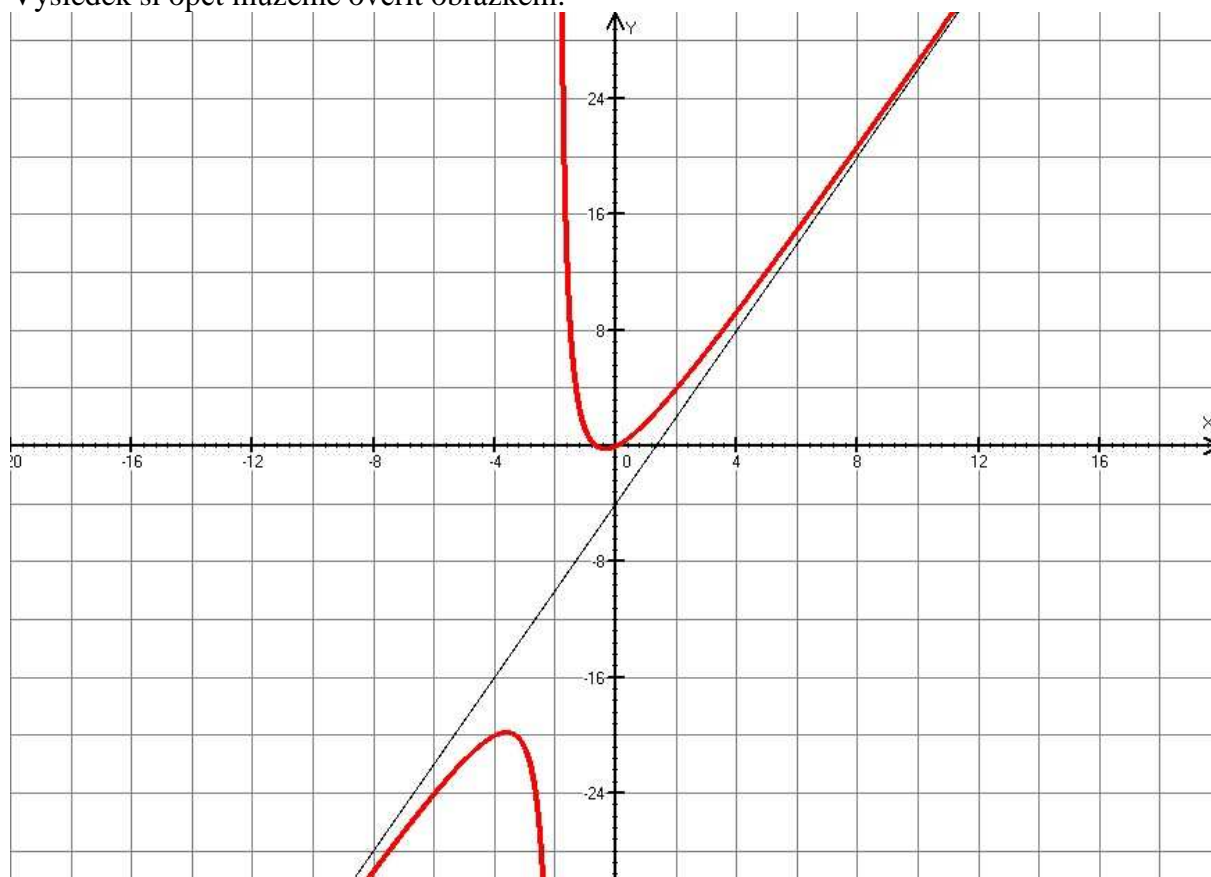
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 + 2x}{x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + 2 \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 2x}{x + 2} - 3 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 2x}{x + 2} - \frac{3x^2 + 6x}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-4x}{x + 2} \right] =$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1 + \frac{0}{x}} = \frac{-4}{1 + 0} = -4$$

asymptotou funkce $y = \frac{3x^2 + 2x}{x + 2}$ je přímka $y = 3x - 4$.

Výsledek si opět můžeme ověřit obrázkem:



Př. 6: Urči asymptoty funkce $y = \frac{x-1}{2x+3}$.

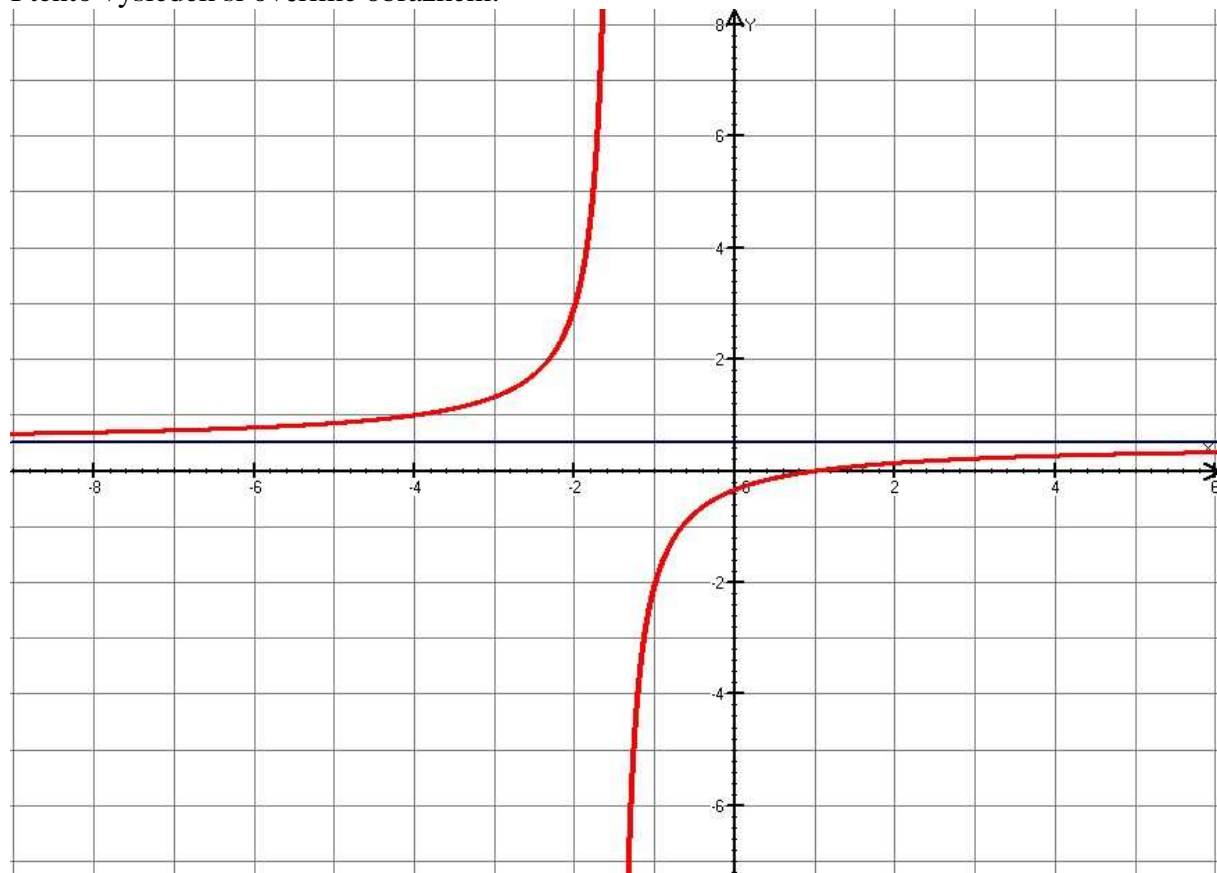
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0-0}{2+0} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{2x+3} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{2\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}$$

$$b = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

asymptotou funkce $y = \frac{x-1}{2x+3}$ je přímka $y = \frac{1}{2}$.

I tento výsledek si ověříme obrázkem:



Př. 7: Petáková:
strana 155/cvičení 15 c) e)

Shrnutí: Pomocí limit můžeme určit rovnice asymptot funkce.