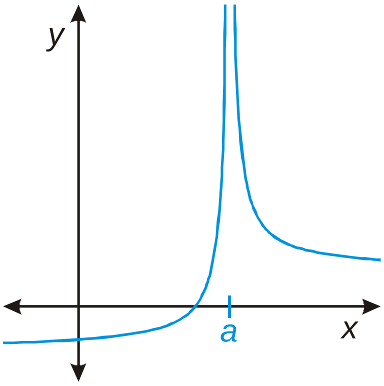
10.1.9 Definice limit II

Předpoklady: 10108

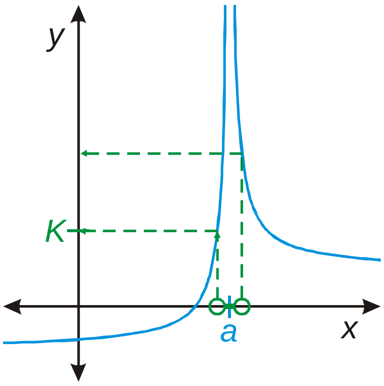
Pedagogická poznámka: Na začátku hodiny studenti zdržovali jako v minulé hodině, ale během příkladů 4 a 5 se situace docela zlepšila. Zřejmě kvůli tomu, že si sami všimli, že je možné definice opravdu sestavovat samostatně.

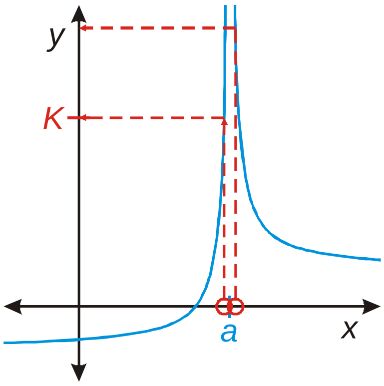
Př. 1: Nakresli obrázek funkce, která má v bodě *a* nevlastní limitu $+\infty$.



Pedagogická poznámka: Už při kreslení je potřeba dávat pozor. Poměrně značné procento studentů kreslí limitu pouze jednostranně.

Jakým způsobem se porovnáváním můžeme přesvědčit, že pro *x* blížící se *a* se hodnoty $f(x)$ blíží k $+\infty$? Už jsme podobný problém řešili u nevlastní limity posloupnosti.
Čím blíž jsme na ose *x* u bodu *a*, tím větší jsou hodnoty $f(x)$.
Obrátíme to: ať si vezmeme na ose *y* libovolně velké číslo, vždycky najdeme na ose *x* okolí bodu *a*, které se zobrazí na čísla větší.





tuhle vlastnost využijeme při definici

Definice vlastní limity funkce v bodě:
Funkce *f* má v bodě *a* limitu L, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu *L*, existuje takové δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a*, $x \neq a$ patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu *L*.
Definice nevlastní limity posloupnosti:

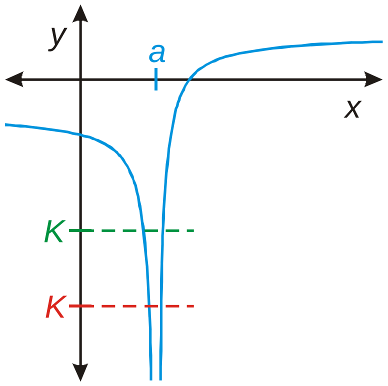
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $+\infty$, právě když pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in N$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$.

Př. 2: Sestav definici nevlastní limity $+\infty$ funkce ve vlastním bodě *a*.

Funkce *f* má v bodě *a* nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu *K* existuje takové δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a*, $x \neq a$ platí $f(x) > K$.

Podobně jako u definic vlastních limit i u definice nevlastní limity můžeme místo okolí bodu použít intervaly.
Funkce *f* má v bodě *a* nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu *K* existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná *x* z intervalu $(a-\delta; a+\delta)$, $x \neq a$ platí $f(x) > K$.
V dalších příkladech budeme vždy vycházet z této definice a budeme definovat limity pomocí intervalů.

Př. 3: Nakresli obrázek funkce, která má v bodě *a* nevlastní limitu $-\infty$. Najdi vlastnost (analogickou vlastnosti používané u nevlastní limity $+\infty$), kterou bude možné využít při její definici.

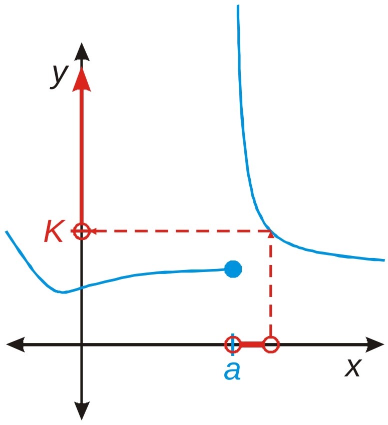


Podobně jako u limity $+\infty$: pro každé číslo *K* najdeme okolí bodu *a*, které se zobrazí na hodnoty menší (a tedy bližší $-\infty$).

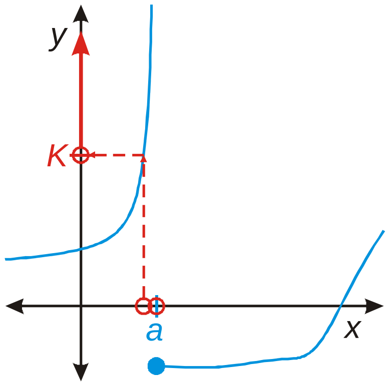
Př. 4: Sestav definici nevlastní limity ∞ funkce ve vlastním bodě *a*. V definici použij místo okolí bodu *a* interval.

Funkce *f* má v bodě *a* nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu *K*, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná *x* z intervalu $(a-\delta; a+\delta)$, $x \neq a$ platí $f(x) < K$.

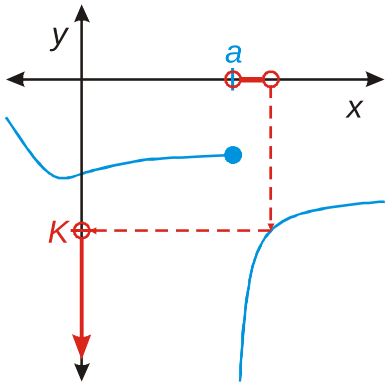
Př. 5: Nakresli obrázky a vedle nich napiš definice pro jednostranné nevlastní limity ve vlastním bodě.



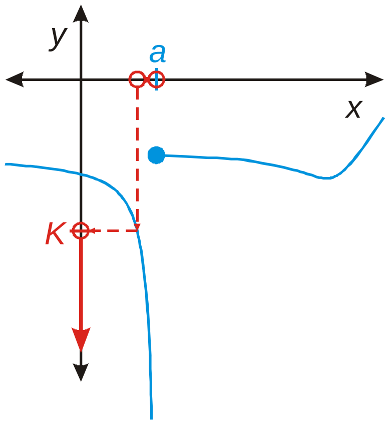
Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu K, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná x z intervalu $(a; a+\delta)$ platí $f(x) > K$.



Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu K, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná x z intervalu $(a-\delta; a)$ platí $f(x) > K$.



Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu K, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná x z intervalu $(a; a+\delta)$ platí $f(x) < K$.

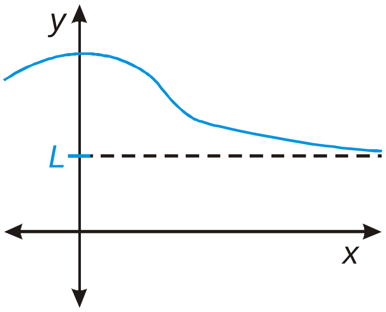


Funkce f má v bodě a nevlastní limitu ∞ zleva, jestliže ke každému číslu K, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna reálná x z intervalu $(a-\delta; a)$ platí $f(x) < K$.

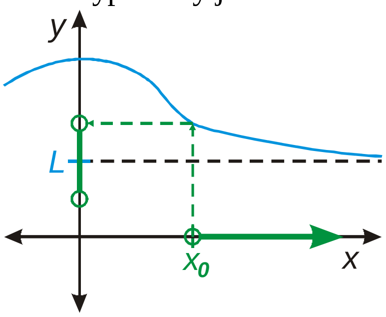
Poznámka: Situace na obrázcích na straně, ze které nezkoumáme limitu samozřejmě může vypadat v podstatě jakkoliv (funkce třeba nemusí být vůbec definována).

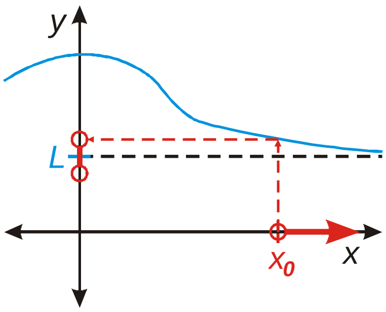
Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu po studentech nechci aby zapisovali definice jednostranných limit celé. Do tabulky v sešitě mají zapisovat pouze ty části definice, které se nějak liší od definice oboustranné nevlastní limity $-\infty$. Je to rychlejší a je z toho lépe vidět to, co je doopravdy důležité.

Př. 6: Nakresli funkci, která má vlastní limitu v nevlastním bodě $+\infty$. Jakou vlastnost bude tato funkce mít? Která z dosud probraných definic limit jí bude nejbližší definici limity, kterou budeme muset pro vlastní limitu v nevlastním bodě $+\infty$ sestavit?



Tento typ limity jsme měli už u posloupností.





Děláme okolíčka kolem limity na ose *y* a pokaždé najdeme takové x_0, že všechna *x* za ním už se zobrazí do vyznačeného okolíčka. Aby mezi funkcí a limitou nezbyla mezera musí to jít pro libovolně malé okolí kolem limity.

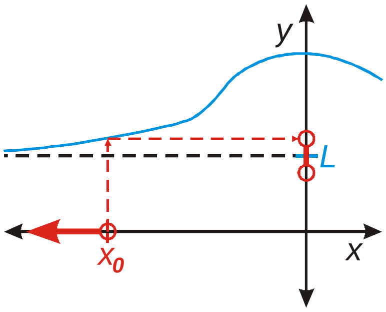
Nejbližším typem limity je zřejmě limita posloupnosti. Tam jsme řešili to samé.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslu *a* říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 7: Sestav definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $+\infty$.

Funkce *f* má v nevlastním bodě $+\infty$ limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x > x_0$ patří funkční hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu *L*.

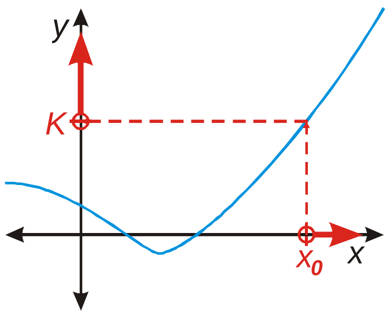
Př. 8: Nakresli obrázek a sestav definici pro vlastní limitu v nevlastním bodě $-\infty$.



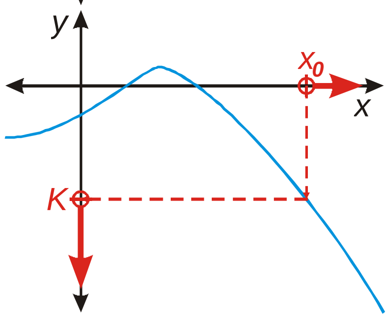
Stejná situace jako u limity v nevlastním bodě $+\infty$, pouze čísla, která zobrazuji do okolíčka na ose *y* musí být menší než x_0.

Funkce *f* má v nevlastním bodě $-\infty$ limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x < x_0$ patří funkční hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu *L*.

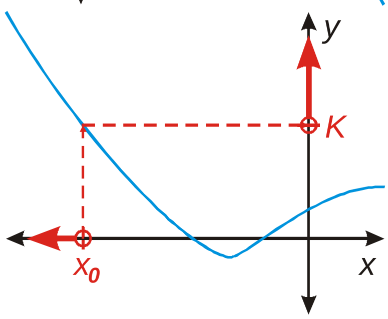
Př. 9: Nakresli obrázky a sestav definice pro nevlastní limity v nevlastních bodech.



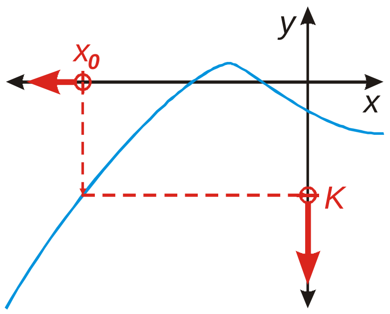
Funkce *f* má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu *K*, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x > x_0$ platí $f(x) > K$.



Funkce *f* má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu *K*, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x > x_0$ platí $f(x) < K$.



Funkce *f* má v nevlastním bodě $-\infty$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu *K*, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x < x_0$ platí $f(x) > K$.



Funkce *f* má v nevlastním bodě $-\infty$ nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu *K*, existuje takové reálné číslo x_0, že pro všechna reálná $x < x_0$ platí $f(x) < K$.

Pedagogická poznámka: Podobně jako u příkladu 5 studenti do sešitů zapisují pouze odlišnosti vyplněné v tabulce červeně.

Shrnutí: Definice limit jsou si velmi podobné a jsou sestaveny ze dvou částí (jedné popisující situaci na ose *x* a druhé popisující situaci na ose *y*).