9.1.5 Permutace I

Předpoklady: 9101, 9102, 9103

Př. 1: Sportovního turnaje se účastní 5 družstev. Kolik existuje možných konečných pořadí?

Budeme postupně sestavovat pořadí:
1. místo … 5 možností
2. místo … 4 možnosti (jeden tým už má určené pořadí)
3. místo … 3 možnosti (dva týmy už mají určené pořadí)
4. místo … 2 možnosti (tři týmy už mají určené pořadí)
5. místo … 1 možnost (čtyři týmy už mají určené pořadí)

$\Rightarrow$ jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané pětice z pěti prvků).

Př. 2: Kolika způsoby se může seřadit při rozlosování do řady 10 dětí na letním táboře?

Dětem, které stavíme do řady, budeme postupně vybírat na místa v řadě:
1. místo … 10 možností
2. místo … 9 možnosti (jedno dítě už je vybráno)
3. místo … 8 možnosti (jedno dítě už je vybráno)

…

9. místo … 2 možnosti (osm dětí je vybraných)
10. místo … 1 možnost (devět dětí už je vybraných)

$\Rightarrow$ jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $10\cdot 9\cdot ...\cdot 2\cdot 1$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané desetice z deseti prvků).

Př. 3: Tři obětovaní studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně“ vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

Stejné jako předchozí příklady, vybíráme postupně na pořadí:
1. místo … 3 možností
2. místo … 2 možnosti (jedno student vybrán)
3. místo … 1 možnosti (jedno studenti vybráni)

$\Rightarrow$ jakoukoliv možnost můžeme kombinovat s ostatními $\Rightarrow$ násobíme mezi sebou $\Rightarrow$ celkem existuje $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ možností, jak může vypadat konečné pořadí (vlastně jde o vytváření uspořádané trojice ze tří prvků).

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:
- mám *n* prvků
- z nich postupně vybírám *n* prvků
- z prvků sestavuji *n*-tici
- záleží na pořadí
- prvky se neopakují

$\Rightarrow$ *n*-tice, které jsme sestavovali se nazývají **permutace z *n* prvků**

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Př. 4: Jaký je vztah mezi permutacemi z n prvků a variacemi?

Permutace: z n prvků sestavuji upořádanou n-tice (používám všechny prvky právě jednou)
Variace: z n prvků sestavuji upořádanou k-tice (používám některé prvky maximálně jednou)
$\Rightarrow$ permutace je speciální případ variace (n členné variace z n prvků).

Permutace z *n* prvků je každá *n*-členná variace z těchto prvků.

Př. 5: Urči počet permutací z n prvků.

Vytváříme uspořádanou n-tici z n prvků:
1. člen: n možností
2. člen: $n-1$ možností
3. člen: $n-2$ možností
…
$(n-1)$-ní člen: 2
n-tý člen: 1
Možnosti kombinujeme: $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$

Mohli jsme také používat variační číslo: $V(n,n)=n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-n+1)=n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 1$

Počet permutací z n prvků značíme $P(n)$.
Součin $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$ patří v kombinatorice k nejběžnějším $\Rightarrow$ zavádíme pro něj speciální symbol $n!$ (čteme n faktoriál).

Pro každé přirozené číslo n definujeme $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.
Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků se rovná $P(n)=n!$.

Většina kalkulaček má speciální tlačítko pro faktoriál.

Př. 6: Rozepiš a vypočti:
a) $P(5)$ b) $P(1)$ c) $P(3)$ d) $P(50)$

a) $P(5)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$
b) $P(1)=1$
c) $P(3)=3\cdot 2\cdot 1=6$
d) $P(50)=50\cdot 49\cdot 48\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1=$
$=30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000$

Faktoriály jsou velmi brzo velmi velká čísla.

Př. 7: Vypiš všechny permutace ze tří prvků $\{a;b;c\}$.

Vypisujeme přehledně podle prvního prvku:
(a,b,c), (a,c,b)
(b,a,c), (b,c,a)
(c,a,b), (c,b,a)
Počet permutací pomocí vzorce: $P(3)=3!=6 \Rightarrow$ odpovídá.

Př. 8: Televizního pořadu, ve kterém diváci kladou politikům nepříjemné otázky, se účastní i občané Nora, Oldřich, Pavlína, Radek, Stanislav, Tamara a Uršula. Urči počet všech možných pořadí, ve kterých:
a) mohou položit své dotazy
b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži
c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek
d) Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara

a) mohou položit své dotazy
stejný příklad jako všechny na začátku: $P(7)=7!$

b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži
otázky pokládají 4 ženy $\Rightarrow$ $4!$ možností, jak je seřadit
otázky pokládají 3 muži $\Rightarrow$ $3!$ možností, jak je seřadit
ke každému pořadí žen můžeme vystřídat všechna pořadí mužů a obráceně $\Rightarrow$ počty možností mezi sebou násobíme $\Rightarrow$ $4!\cdot 3!$ možností

c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek
Pavlínu a Radka můžeme považovat za jediného účastníka diskuse $\Rightarrow$ diskuse se účastní 6 tazatelů $\Rightarrow$ $6!$ možností

d) Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara
Každému pořadí ve kterém položila Nora dotaz před Tamarou odpovídá jedno pořadí, ve kterém pouze prohodíme tyto dvě ženy a Tamara bude klást dotaz před Norou $\Rightarrow$ hledaná pořadí tvoří přesně polovinu všech $\Rightarrow$ je jich $\frac{7!}{2}$

Př. 9: Petáková:
strana 146/cvičení 47
strana 146/cvičení 48

Shrnutí: Pokud tvoříme z *n* prvků uspořádané *n*-tice máme $n!=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ možností.