9.1.1 Základní kombinatorická pravidla I

Předpoklady:

Př. 1: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolik dvojic kluk-holka je možné ze studentů třídy sestavit?

Vybíráme ze 17 holek $\Rightarrow$ 17 možností, jak vybrat holku
Ať vybereme jakoukoliv holku, můžeme k ní přidat libovolného kluka $\Rightarrow$ 13 možností, jak vybrat kluka pro už vybranou holku $\Rightarrow$ celkem $17 \cdot 13$ možností

Aby bylo jasnější, jak jsme příklad řešili, **budeme všechny výsledky udávat ve tvaru součinu (případně složitějšího výrazu) bez závěrečného vyčíslení** (s kalkulačkou je to otázka chvilky, z výsledku 221 nikdo nepozná, jak jsme k němu došli).

Pedagogická poznámka: Na předcházející příklad nechávám studentům jenom chvilku. Poté, co si ukážeme jeho řešení, jsou studenti v naprosté většině případů schopni postupovat dále sami.

Př. 2: V prvních ročnících studují tyto počty studentů: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné sestavit delegaci, která obsahuje z každé třídy právě jednoho studenta?

Podobné jako předchozí příklady: 30 možností jak vybrat zástupce 1.A, ke každému takto vybranému můžeme vystřídat všechny možnosti výběru z ostatních tříd:

Celkový počet možností: $\underset{1.A}{30} \cdot \underset{1.B}{33} \cdot \underset{1.C}{30} \cdot \underset{5.O}{22}$

Delegaci je možné sestavit $30 \cdot 33 \cdot 30 \cdot 22$ způsoby.

Př. 3: V současnosti používané státní poznávací značky automobilů mají tvar: CPC-CCCC, kde C znamená číslici od 0 do 9 a P písmeno z mezinárodní abecedy s 26 znaky. Kolik státní poznávacích značek je možné sestavit? Kolik státních poznávacích značek bylo možné sestavit u předcházejícího systému PPP-CCCC.

Stejně jako u předchozích příkladů, můžeme s výběrem jednoho konkrétního znaku na libovolném místě kombinovat všechny možnosti výběru na ostatních místech $\Rightarrow$ číslice vybíráme z 10 možností, písmena z 26 možností
Současný systém: $10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26000000$
Bývalý systém: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175760000$

Př. 4: Urči počet všech trojciferných čísel.

Trojciferné číslo má tvar například: 547
Kolik možností na jednotlivé cifry?
1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula)
2. cifra: 10 možností (libovolná číslice)
3. cifra: 10 možností (libovolná číslice)

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ - logický výsledek trojmístná čísla začínají číslem 100 a končí číslem 999 $\Rightarrow$ je jich 900

Př. 5: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Vybírali jsme z nějaké množiny a sestavovali jsme uspořádané skupiny
Možnosti jsme kombinovali navzájem každou s každou.

Pedagogická poznámka: I když studenti nebudou schopni zformulovat společné rysy tak, jak jsou uvedeny níže, je alespoň pokus o tuto formulaci velmi potřebný.

Všechny předchozí příklady mají společné rysy:

- vybírali jsme prvky z množin a sestavovali jsme uspořádané (záleželo na pořadí) dvojice (trojice, sedmerice, trojice – obecně používáme název ***k*-tice**)
- ke každému výběru z jedné množiny jsme mohli kombinovat všechny možnosti výběrů z ostatních množin

$\Rightarrow$ počet možností, kterými můžeme získat výsledek, jsme spočetli jako součin možností výběru z jednotlivých množin (kvůli tomu, že k jednomu výběru z libovolné množiny, můžeme kombinovat všechny možnosti výběru z ostatních množin)
při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby atd. až *k*-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Př. 6: Urči hodnoty *k*, n_1, $n_2, \ldots n_k$ v příkladě 4.

Sestavovali jsme uspořádané trojice $\Rightarrow$ $k = 3$
Ze vztahu $9 \cdot 10 \cdot 10$ vyplývá: $n_1 = 9$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$

Proč se v pravidlu kombinatorického součinu neustále opakovalo „po výběru předchozích členů“? Ukáže hned následující příklad.

Př. 7: Urči počet všech trojciferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje.

Trojciferné číslo má tvar například: 547
Kolik možností na jednotlivé cifry?
1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni)
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo)
3. cifra: 8 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první dvě místa)
Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

Př. 8: Vysvětli, proč není možné vyřešit předchozí příklad „sestavováním odzadu“ (tím, že začneme hledat nejdříve poslední cifru), které vede k nesprávnému výsledku $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Pokud bychom sestavovali číslo odzadu, platilo by:
3. cifra: 10 možností
2. cifra: 9 možností
1. cifra: nevíme kolik máme možností, protože záleží na tom, jestli už na místo druhé nebo třetí cifry byla vybrána nula ($\Rightarrow$ 8 možností pro první cifru) nebo ne ($\Rightarrow$ 7 možností pro 1. cifru)

$\Rightarrow$ **je lepší postupovat tak, abychom nejdříve obsazovali místa omezená nějakou podmínkou.**

Pedagogická poznámka: Sestavováním odzadu je příklad vyřešen v příští hodině. Zde je uveden pouze kvůli tomu, aby studenti uvědomili nebezpečí stavu, kdy není jasné v jaké situaci vlastně jsme (použití nebo nepoužití nuly).

Vrátíme se na chvíli na začátek k nejjednodušším příkladům:

Př. 9: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolika způsoby může třída vybrat jednoho zástupce do školní rady?

Vybíráme jednu studentku ze 17 nebo jednoho kluka ze 13 $\Rightarrow$ dohromady $17 + 13 = 30$ možností (více než logické, když má třída 30 studentů)

Př. 10: V prvních ročnících studují tyto počty studentů: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné vybrat jednoho zástupce 1. ročníků v poradním orgánu ředitele školy?

Stejné jako předchozí příklad: máme celkem $30 + 33 + 30 + 22$ možností.

Př. 11: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Vybírali jsme jeden prvek z více množin.
Žádný prvek nebyl ve dvou množinách.

Pedagogická poznámka: Podobný příklad jako příklad 5. Toho, že množiny mají prázdné průniky si studenti většinou nevšimnou, nemá cenu řešení příkladu příliš protahovat.

Oba předchozí příklady mají společné rysy:
- vybírali jsme jeden prvek se sjednocení několika množin
- množiny, ze kterých jsme vybírali jsou **disjunktní** (žádný prvek není ve dvou množinách, množiny mají prázdné průniky)

$\Rightarrow$ počet možností, kterými můžeme získat výsledek, jsme spočetli jako součet možností výběru z jednotlivých množin (vybereme množinu a z ní pak prvek)
při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li $A_1, A_2, ..., A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, ..., p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + ... + p_n$

Požadavek na disjunktnost množin je strašně důležitý, jeho opomenutí pravidelně ústí do katastrof.

Př. 12: Petáková:
strana 145/cvičení 32
strana 145/cvičení 33

Shrnutí: