8.3.2 Limity některých posloupností

Předpoklady: 8301

Opakování z minulé hodiny:

Hodnoty posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ se pro *n* blížící se k nekonečnu blíží k 2 a to tak, že mezi posloupností a číslem 2 „neexistuje žádná mezera“ $\Rightarrow$ říkáme, že číslo 2 je limitou posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ pro *n* blížící se k nekonečnu (píšeme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{2^n}+2\right)=2$).

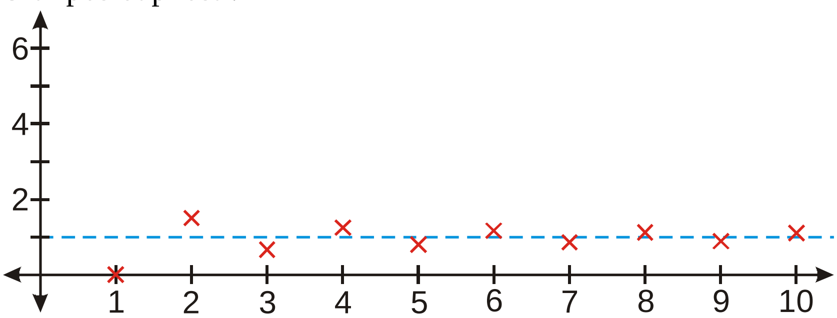
Exaktní zachycení předchozího odstavce obsahuje definice limity:

> Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslu *a* říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nyní si rozebereme posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n}+1\right)_{n=1}^{\infty}$.

Prvních deset členů posloupnosti: $0;1\frac{1}{2};\frac{2}{3};1\frac{1}{4};\frac{4}{5};1\frac{1}{6};\frac{6}{7};1\frac{1}{8}$

Graf posloupnosti:



Vypadá to, že limitou této posloupnosti je číslo 1. Hodnoty se k němu blíží z obou stran.

Zkusíme vlastnost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{[-1]^n}{n}+1\right)=1$ dokázat z definice v modrém rámečku.

Zvolíme $\varepsilon = 0{,}1$. Hledáme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dosadím: $\left|\frac{[-1]^n}{n}+1-1\right| < 0{,}1$

$\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| < 0{,}1$ platí (pro $n \in N$): $\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| = \frac{\left|(-1)^n\right|}{|n|} = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < 0{,}1$

$10 < n \Rightarrow$ pro a_{11} a všechna a_n za ním platí: $|a_n - 1| < 0{,}1$.

Zkusíme to obecně pro $\varepsilon > 0$

$\left|\frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| < \varepsilon$ platí (pro $n \in N$): $\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

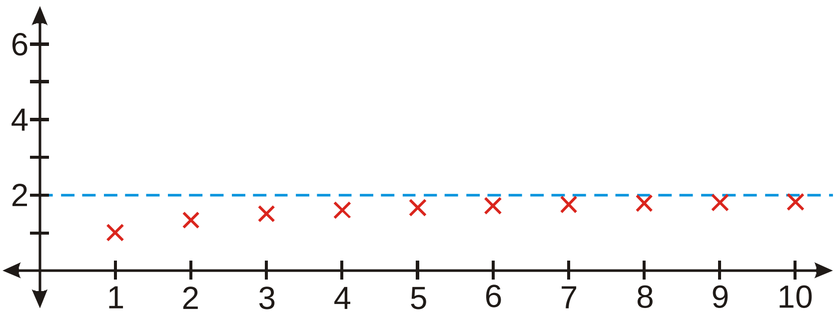
$\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow$ protože $\varepsilon > 0$ určitě takové a_n najdu $\Rightarrow$ posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1\right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu 1.

Př. 1: Pro zadané posloupnosti napiš prvních deset členů, načrtni jejich graf a odhadni zda mají limitu:

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $(1)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$1;\frac{4}{3};\frac{3}{2};\frac{8}{5};\frac{5}{3};\frac{12}{7};\frac{7}{4};\frac{16}{9};\frac{9}{5};\frac{20}{11}$



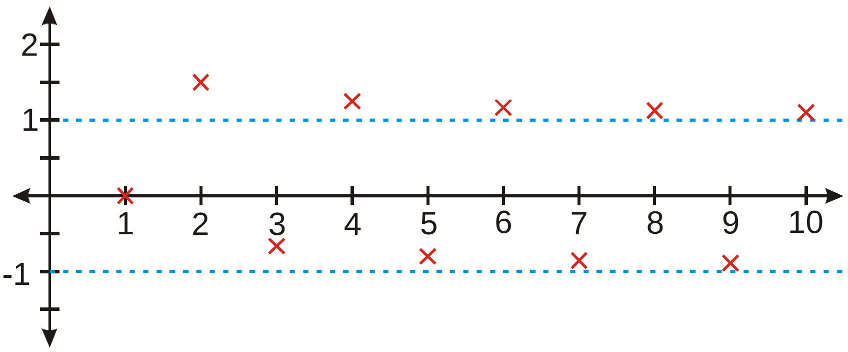
Z grafu se zdá, že posloupnost má limitu 2

Z úvahy: výraz $\frac{2n}{n+1}$, se blíží výrazu $\frac{2n}{n} = 2$

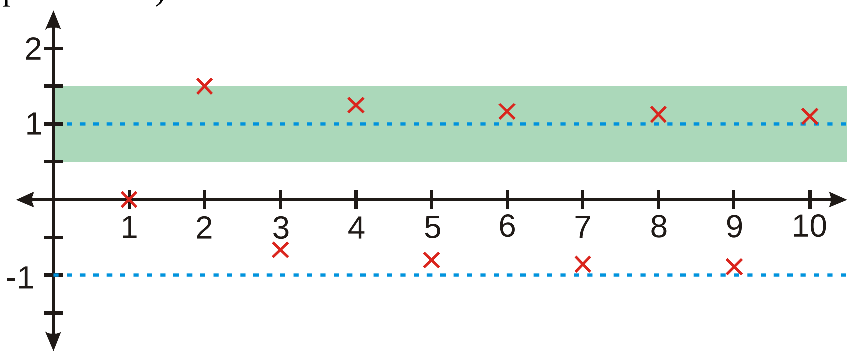
$\Rightarrow$ zřejmě platí $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

b) $\left([-1]^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$0;\frac{3}{2};-\frac{2}{3};\frac{5}{4};-\frac{4}{5};\frac{7}{6};-\frac{6}{7};\frac{9}{8};-\frac{8}{9};\frac{11}{10}$

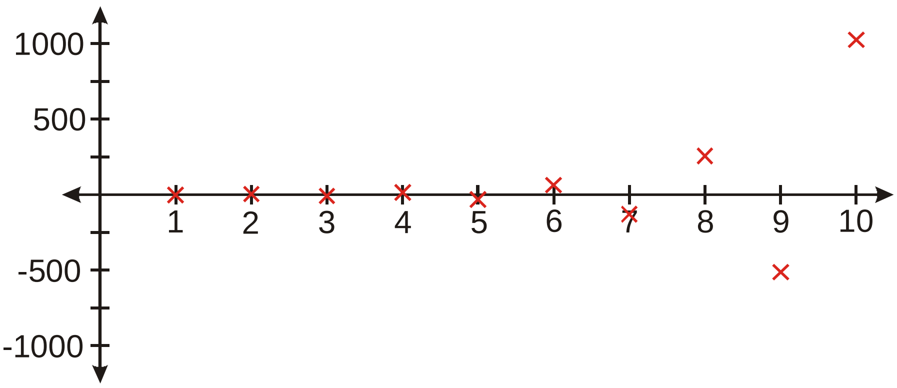


Z grafu se zdá, že posloupnost má dvě limity 1 a –1, ale pozor!!! Kdyby posloupnost měla limitu 1, musel by například pro pás o poloměru 0,5 existovat člen a_n takový, že všechny členy posloupnosti za ním by byly uvnitř pásu, ale to se kvůli tomu, že polovina členů posloupnosti se snaží přiblížit k –1 nestane, protože tyto členy se do pásu nedostanou $\Rightarrow$ posloupnost nemá žádnou limitu (u limit posloupností nejde sedět jedním zadkem na dvou posvíceních).



c) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$

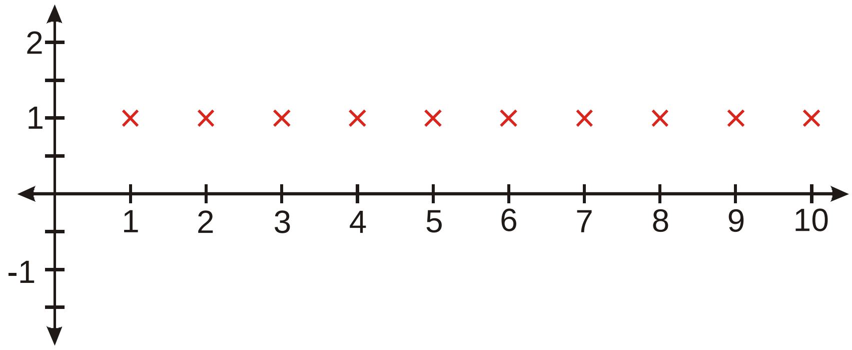
$-2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256; -512; 1024$



jak z hodnot, tak z grafu je zřejmé, že posloupnost nemá žádnou limitu

d) $(1)_{n=1}^{\infty}$

$1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1$



na první pohled se zdá, že posloupnost se „k ničemu neblíží“ a neměla by tedy mít limitu, pokud však použijme přímo definici limity, je zřejmé, že posloupnost má limitu rovnou jedné, protože pro libovolně široký pás kolem 1 jsou všechny členy posloupnosti ihned uvnitř a splňují tak podmínku pro existenci limity

$\Rightarrow$ zřejmě platí: $\lim\limits_{n\to\infty}(1)=1$

Předchozí příklady dobře dokumentují dvě další věty o limitách posloupností:

- **Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.**
- **Každá konvergentní posloupnost je omezená.**

Př. 2: Najdi v předchozím příkladu bod, který dokumentuje každou z předchozích dvou vět a zkus najít hlavní myšlenku důkazů obou vět.

a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
větu dokumentuje bod b), ačkoliv se z grafu zdá, že posloupnost má dvě limity, je v příkladu zdůvodněno, proč posloupnost nemá ani jedinou (například do pásu o poloměru 0,5 existovat se nevejde polovina členů posloupnosti, které se snaží přiblížit hodnotě -1) $\Rightarrow$ myšlenka důkazu: kdyby posloupnost měla dvě různé limity stačilo by kolem jedné z nich udělat pás, který má menší poloměr než je vzdálenost těchto limit a členy, které se blíží k druhé limitě budou mimo něj)

b) Každá konvergentní posloupnost je omezená.
s větou souvisí bod c), kde máme neomezenou posloupnost a je ihned vidět, že nemůže mít limitu $\Rightarrow$ myšlenka důkazu: posloupnost je neomezená, právě když se pro *n* blížící se nekonečnu blíží členy posloupnosti také nekonečnu (nebo mínus nekonečnu = roste nebo klesá nade všechny meze), pak se ale nemohou blížit k nějakému konkrétnímu číslu (limitě)

Př. 3: Odhadni limity následujících posloupností a poté jejich existenci dokaž použitím definice limity:

a) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $(3)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}, |q|<1$

a) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

$\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$ 2^n je vždy kladné číslo $\Rightarrow$ platí $\left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{2^n}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$ zlogaritmujeme, $\log x$ je rostoucí funkce $\Rightarrow$ neobracíme nerovnost

$\log \frac{1}{\varepsilon} < \log 2^n$

$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2$ $\log 2 > 0 \Rightarrow$ znaménko se nemění

$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2$

$\dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2} < n$ $\Rightarrow$ pro každé ε dokážeme dopočítat n $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

odhadujeme $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ n je přirozené číslo $\Rightarrow$ platí $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{n}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$ $\Rightarrow$ máme určené n pro každé ε $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

c) $(3)_{n=1}^{\infty}$

odhadujeme $\lim_{n \to \infty} 3 = 3$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$|3-3| < \varepsilon$

$|0| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ pro libovolné ε je podmínka splněna ihned $\Rightarrow$ jako a_n můžeme brát a_1 a jako n jedničku $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí: $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 0$

d) $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}, |q| < 1$

odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$|q^n - 0| < \varepsilon$

$|q^n| < \varepsilon$ zlogaritmujeme, $\log x$ je rostoucí funkce $\Rightarrow$ neobracíme nerovnost

$\log|q^n| < \log\varepsilon$

$n\log|q| < \log\varepsilon \quad / : \log|q|$ $|q| < 1 \Rightarrow \log|q| < 0 \Rightarrow$ obracíme znaménko nerovnosti

$n > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}$ $\Rightarrow$ pro každé ε dokážeme dopočítat n $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí:

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0; \quad |q| < 1$

Poslední výsledek je jasný a důležitý zároveň. Zformulujeme si ho do věty a podle ní zformulujeme ještě jednu větu:

- **Geometrická posloupnost $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**
- **Geometrická posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient *q* platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**

Shrnutí: Dosazením do definice můžeme dokázat existenci limity.