8.2.9 Užití geometrických posloupností

Předpoklady: 8206, 8207

Pedagogická poznámka: Tři příklady v této hodině nezaberou 45 minut, původně jsem předpokládal, že jejich řešení bude trvat maximálně 20 minut a zbytek hodiny bude možné věnovat následující hodině 8209. Bohužel došlo k jednomu z nejnečekanějších překvapení. Druhý příklad počítali studenti s ohromnými problémy, i ti nejlepší z nich se neustále snažili místo výpočtu a_n určit s_n jako v příkladě 1.
Původně jsem zařazoval příklad 2 jako druhý kvůli použití logaritmů při výpočtu času nutného k jejich namnožení. Zkušenost, kterou jsem udělal se studenty, je podle mě dalším argumentem pro zachování tohoto pořadí.

Př. 1: O vynálezci šachů se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší čínský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoliv, si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčku chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg, pokud 1 kg rýže tvoří přibližně 30 000 zrnek.

Počty zrnek na jednotlivých políčkách tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, …
$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ (64 políček šachovnice)

Určíme součet: $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 1\dfrac{2^{64} - 1}{2 - 1} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Hmotnost zrnek v kg: $\dfrac{1{,}8 \cdot 10^{19}}{30000} = 6{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{kg}$

Pro srovnání celosvětová roční produkce rýže je $5 \cdot 10^{11}\ \text{kg}$.

Př. 2: Baktérie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik baktérií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den. Jak dlouho by trvalo než by hmotnost baktérií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné baktérie je přibližně $6 \cdot 10^{-15}\ \text{kg}$. Hmotnost Země $6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$.

Počty baktérií tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ..
$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 25$ (první člen je po 0 hodinách jediná baktérie na začátku pokusu)
použijeme vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 1 \cdot 2^{24} = 16776216$

Za jak dlouho by baktérie vážily stejně jako Země:

Potřebný počet baktérií: $\frac{6\cdot 10^{24}}{6\cdot 10^{-15}}=10^{39}$ $\Rightarrow$ toto musí být hodnota hledané n-tého členu posloupnosti

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 10^{39} = 2^{n-1}$ - musíme logaritmovat

$\log 10^{39} = \log 2^{n-1}$

$39\cdot\log 10 = (n-1)\log 2$

$n-1=\frac{39}{\log 2}$

$n=\frac{39}{\log 2}+1=130,6$ $\Rightarrow$ 131 člen posloupnosti $\Rightarrow$ po 130 hodinách

Po 130 hodinách (5,5 dne) by baktérie vážily více než Země.

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou přibližně 10x vyšší). Při tetování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních v roce 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo v roce 2050?

1000 … 100%

122 … x%

$\frac{x}{122}=\frac{100}{1000}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{100}{1000}\cdot 122=12,2\,\%$

V roce 2007 přibylo 12,2% HIV pozitivních.

Počet nemocných v roce:

začátek 2008 … $1000\cdot 1{,}122$

začátek 2009 … $(1000\cdot 1{,}122)\cdot 1{,}122$

po x letech … $1000\cdot 1{,}122^x$

do konce roku 2015 uplyne od konce roku 2007 8 let

počet nakažených v roce 2015 … $1000\cdot 1{,}122^8 = 2512$ osob

do konce roku 2015 uplyne od konce roku 2007 43 let

počet nakažených v roce 2050 … $1000\cdot 1{,}122^{43} = 141154$ osob

Pokud se bude nemoc šířit stejným tempem zvýší se počet nakažených do konce roku 2015 na 2512 osob do konce roku 2050 na 141154 osob.

Shrnutí: Exponenciální růst popisovaný geometrickou posloupností s kvocientem větším než 1 je čím dál rychlejší a proto dlouhodobě neudržitelný.