8.1.6 Vlastnosti posloupností II

Předpoklady: 2110, 2111, 2407, 8102, 8105

Opět opakování z funkcí:
Funkce $f(x)$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkce $f(x)$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Př. 1: S užitím definic nerostoucí a neklesající funkce zformuluj definici nerostoucí a neklesající posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností. Zformuluj analogické věty pro určování těchto vlastností podle vztahů pro a_n a a_{n+1}.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $r,s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \leq a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $r,s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \geq a_s$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Pedagogická poznámka: Po minulé hodině nepůsobí předchozí příklad žádné problémy, kromě toho, že studentům připadá zbytečné všechno psát.

Př. 2: Porovnej definice rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající posloupnosti. Které druhy posloupností mají podobné definice? V čem se liší? Jaké to má důsledky.

Definice se liší v nerovnostech. Existují dvě dvojice
posloupnost rostoucí $(a_r < a_s)$ $\Leftrightarrow$ posloupnost neklesající $(a_r \leq a_s)$
posloupnost klesající $(a_r > a_s)$ $\Leftrightarrow$ posloupnost nerostoucí $(a_r \geq a_s)$

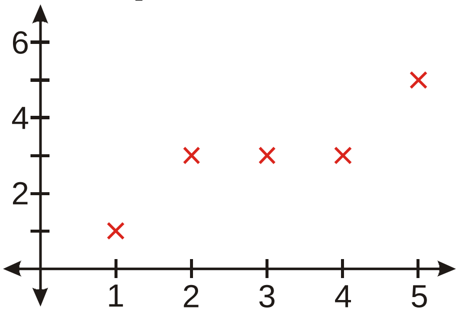
Například v první dvojici rozdíl v nerovnostech znamená, že člen rostoucí posloupnosti musí být větší než jeho předchůdce, zatím co člen neklesající může být větší nebo stejný jako jeho předchůdce.

Př. 3: Rozhodni, jaký vztah existuje mezi rostoucími a neklesajícími posloupnostmi. Jaký je vztah mezi klesajícími a nerostoucími?

Všechny rostoucí posloupnosti jsou neklesající.
Všechny klesající posloupnosti jsou nerostoucí.

Př. 4: Načrtni graf posloupnost $(a_n)_{n=1}^{5}$, která je neklesající, ale není rostoucí.

Pro členy posloupnosti musí platit $a_{n+1} \geq a_n$, ale nesmí pro ně platit $a_{n+1} > a_n$ $\Rightarrow$ alespoň jednou musí dojít k tomu, že dva po sobě následující členy se budou rovna $\Rightarrow$ možností je mnoho, například



Př. 5: Říkají věty: „Posloupnost je nerostoucí" a „Posloupnost není rostoucí" to samé?

Neříkají. Například posloupnosti $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ není rostoucí, ale není nerostoucí.
Věta: „Posloupnost je nerostoucí" tvrdí, že posloupnost má speciální vlastnost.
Věta: „Posloupnost není rostoucí" naopak tvrdí, že posloupnost speciální vlastnost nemá.

Opět opakování z funkcí:
Funkce $f(x)$ se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo H takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq H$.
Funkce $f(x)$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq d$.

Př. 6: S užitím definic shora omezenou a zdola omezenou funkci zformuluj definici shora omezené a zdola omezené posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo H takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \leq H$.
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \geq d$.

Př. 7: Zjisti, které z následujících posloupností jsou shora omezené, zdola omezené a které jsou omezené.

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\left[-1\right]^{n} n^{2}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\left[-1\right]^{n} \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

vypíšu si několik prvních členů: $1;\frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{4};\frac{9}{5};\ldots \Rightarrow$ zdá se, že posloupnost je rostoucí, ale její hodnoty se přibližují ke dvojce

$\Rightarrow$ testuji $a_n \geq 1$: $\frac{2n-1}{n} \geq 1 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1 \Rightarrow$ můžeme vynásobit nerovnost n nebát se změny nerovnosti)

$2n-1 \geq n$

$n \geq 1$ - přesně tato čísla za n dosazujeme, takže nerovnost platí

$\Rightarrow$ testuji $a_n < 2$: $\frac{2n-1}{n} < 2 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$)

$2n-1 < 2n$

$-1 < 0$ platí vždy

dohromady: $1 \leq a_n < 2 \Rightarrow$ posloupnost je omezená na interval $\langle 1;2)$

b) $\left(\left[-1\right]^{n} n^{2}\right)_{n=1}^{\infty}$

vypíšu si několik prvních členů: $-1;4;-9;16;-25;\ldots$

je vidět, že posloupnost není omezená ani zdola ani shora, absolutní hodnota členů posloupnosti jde k nekonečnu (jako hodnoty funkce $y = x^2$ a kvůli výrazu $\left[-1\right]^{n}$ je jejich znaménko neustále střídá

c) $\left(\left[-1\right]^{n} \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

vypíšu si několik prvních členů: $-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{5};\ldots$

posloupnost se skládá ze dvou částí:

$\frac{1}{n}$ jsou čísla, která jsou od 1 k nule (čím větší n tím menší hodnota zlomku jako u funkce $y = \frac{1}{x}$) $\Rightarrow$ absolutního hodnota každého dalšího členu posloupnosti je menší než členu předchozího

výraz $\left[-1\right]^{n}$ neustále střídá znaménko členů posloupnosti

$\Rightarrow$ posloupnost je omezena na interval $\left\langle -1;\frac{1}{2} \right\rangle$

Jak můžeme odhadnout, ke kterému číslu se blíží členy posloupnosti? Co ukazuje u posloupnosti $\left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ na to, že se její hodnoty pro velká n přibližují ke dvěma?

Zkusíme si do posloupnosti dosadit několik čím dál větších čísel:

$n=100 \quad \Rightarrow \frac{2\cdot 100-1}{100}=\frac{199}{100}$

$n=1000 \quad \Rightarrow \frac{2\cdot 1000-1}{1000}=\frac{1999}{1000}$

$n=10000 \quad \Rightarrow \frac{2\cdot 10000-1}{10000}=\frac{19999}{10000}$

$\Rightarrow$ role,kterou ve výsledku hraje –1 v čitateli zlomku se neustále snižuje $\Rightarrow$ zlomek se přibližuje zlomku $\frac{2n}{n}=2$

Pedagogická poznámka: Takto vysvětlená představa limity nepůsobí studentům problémy a po dvou příkladech u tabule limity bez problémů nalézají.

K problému „hledání čísel, kterým se přibližují členy posloupností" se v dílu o posloupnostech ještě vrátíme.

Př. 8: Rozhodni zda jsou následující posloupnosti omezené (omezené shora nebo zdola). Pokud ano, urči na jaké intervaly.

a) $\left(\frac{5n+1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n}+3\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{5n+1}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

vypíšu si několik prvních členů: $2;\frac{11}{6};\frac{16}{9};\frac{21}{12};\frac{26}{15};...$ $\Rightarrow$ zdá se, že posloupnost je klesající

$\Rightarrow$ testuji $a_n \leq 2$: $\frac{5n+1}{3n} \leq 2 \quad /\cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$)

$5n+1 \leq 2\cdot 3n$

$1 \leq n$ - přesně tato čísla za n dosazujeme, takže nerovnost platí

$\Rightarrow$ hledám ke kterému číslu se členy posloupnosti blíží, pro velká n posloupnost vypadá jako $\frac{5n}{3n}=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ členy posloupnosti se blíží $\frac{5}{3}$.

testuji $a_n > \frac{5}{3}$: $\frac{5n+1}{3n} > \frac{5}{3} \quad /\cdot 3n$ (u posloupností $n \geq 1$)

$3(5n+1) > 5\cdot 3n$

$15n+3 > 15n$

$3>0$ platí vždy

dohromady: $\frac{5}{3} < a_n \leq 2 \Rightarrow$ posloupnost je omezená na interval $\left(\frac{5}{3}; 2 \right\rangle$

b) $\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} + 3 \right)_{n=1}^{\infty}$

vypíšu si několik prvních členů: $2; \frac{17}{4}; \frac{5}{3}; \frac{35}{8}; \ldots \Rightarrow$ nebudeme to počítat dál, stejně si z toho nic nepředstavíme $\Rightarrow$ podíváme se na jednotlivé části vzorce

- $\frac{3n-1}{2n} \Rightarrow$ vytváří čísla, která se u různých členů liší
- $[-1]^n \Rightarrow$ pouze mění znaménko předchozího členu
- $+3 \Rightarrow$ k výsledku předchozích operací přičítám stále stejné číslo

$\Rightarrow$ prostudujeme část $\frac{3n-1}{2n}$ a pak domyslíme, co s ní dělá zbytek posloupnosti

napíšu si několik prvních členů posloupnosti $\left(\frac{3n-1}{2n} \right)_{n=1}^{\infty}$: $1; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}; \frac{11}{8}; \ldots$

$\Rightarrow$ rostoucí posloupnost, hodnoty se blíží $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ testuji $a_n \geq 1$: $\frac{3n-1}{2n} \geq 1 \quad / \cdot n$ (u posloupností $n \geq 1$)

$3n - 1 \geq 2n$

$n \geq 1$ - přesně tato čísla za n dosazujeme, takže nerovnost platí

$\Rightarrow$ testuji $a_n < \frac{3}{2}$: $\frac{3n-1}{2n} < \frac{3}{2} \quad / \cdot 2n$ (u posloupností $n \geq 1$)

$6n - 2 < 6n$

$-2 < 0$ platí vždy

$\Rightarrow$ posloupnost $\left(\frac{3n-1}{2n} \right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená v intervalu $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right)$, pro velká čísla n se členy blíží k $\frac{3}{2}$

začneme se vracet k původní posloupnosti:

$\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} \right)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ část $[-1]^n$ prohazuje znaménka $\Rightarrow$ posloupnost se střídavě blíží k $\frac{3}{2}$ a $-\frac{3}{2}$

$\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} + 3 \right)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ k číslu 3 přičítám střídavě čísla blížící se k k $\frac{3}{2}$ a $-\frac{3}{2} \Rightarrow$ výsledné hodnoty se blíží k $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ a $3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ posloupnost $\left([-1]^n \frac{3n-1}{2n} + 3 \right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená na interval $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right)$

Pedagogická poznámka: K bodu b) se většina studentů nedostane. Pro ty co se k němu prokoušou je těžký právě kvůli tomu, že si ho musí rozdělit na několik částí a ty řešit postupně. Což je přesně to, co studenti neumí.

Př. 9: Petáková:
strana 66/cvičení 7 b) d) f)

Shrnutí: Při ověřování omezenosti porovnáváme vzorec pro *n*-tý člen s konkrétním číslem.