8.1.4 Rekurentní zadání posloupnosti II

Předpoklady: 8101, 8102, 8103

Př. 1: Je dána posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádři ji rekurentně.

Dva možné postupy:

Vypsání čísel

Vypíšu si členy posloupnosti a zkusím najít rekurentní vztah.

posloupnost: $2;5;8;11;14;...$

platí, že každý člen je o tři větší než předchozí $\Rightarrow$

$a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3; n \in N$

Úprava vzorce

Vzorec pro a_n použiju pro vyjádření a_{n+1}. V tomto vyjádření zkusím vyrobit vztah pro a_n.

$a_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 3 - 1 = 3n - 1 + 3 = a_n + 3$

$\Rightarrow a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3; n \in N$

V obou případech musím vzorec ověřit dosazením: $a_n = 3n-1$, $a_{n+1} = 3(n+1)-1$

$a_{n+1} = a_n + 3$

$3(n+1) - 1 = 3n - 1 + 3$

$3n + 3 - 1 = 3n - 1 + 3$ $\Rightarrow$ vzorec platí

Př. 2: Ověř, že posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ je možné zadat rekurentně také takto:

$a_1 = 2; a_2 = 5; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; n \in N$

Dosadím stejně jako v předchozím případě:

$a_{n+2} = 3(n+2) - 1$, $a_{n+1} = 3(n+1) - 1$, $a_n = 3n - 1$

$3(n+2) - 1 = 2[3(n+1) - 1] - (3n - 1)$

$3n + 6 - 1 = 2[3n + 3 - 1] - 3n + 1$

$3n + 5 = 2[3n + 2] - 3n + 1$

$3n + 5 = 6n + 4 - 3n + 1$

$3n + 5 = 3n + 5$ $\Rightarrow$ i druhý rekurentní vzorec je správný $\Rightarrow$ posloupnost může mít více rekurentních zadání

Př. 3: Pro posloupnosti zadané pomocí vzorce pro *n*-tý člen najdi rekurentní vyjádření:

a) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

V obou případech budeme upravovat vzorec pro a_{n+1} tak, abychom ve výrazu získali vzorec pro a_n.

a) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

upravuji vzorec pro $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}$.

Ještě určím první člen posloupnosti: $a_1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

Posloupnost $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rekurentně zadána takto: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}; n \in N$

b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

upravuji vzorec pro $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{n+2}{n}$.

Ještě určím první člen posloupnosti: $a_1 = \frac{n+1}{n} = \frac{1+1}{1} = 2$

Posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rekurentně zadána takto: $a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{n+2}{n}; n \in N$

Př. 4: Pro následující rekurentně dané posloupnosti najdi vzorec pro *n*-tý člen:

a) $a_1 = 1; a_{n+1} = 2a_n; n \in N$

b) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$

V obou případech můžeme obě posloupnosti vypsat a hledat vzorec přímo z řad.
Pro jednodušší rekurentně zadané posloupnosti existuje i manuálnější postup:
$a_1 = 1; a_{n+1} = 2a_n; n \in N \Rightarrow$ platí:

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 \\
a_3 &= 2a_2 \\
a_4 &= 2a_3 \\
&\ldots \\
a_{n-1} &= 2a_{n-2} \\
a_n &= 2a_{n-1}
\end{aligned}$$

Předchozí rovnice vynásobíme:

$a_2a_3a_4...a_{n-1}a_n = 2a_1 \cdot 2a_2 \cdot 2a_3 \cdot ... \cdot 2a_{n-2} \cdot 2a_{n-1}$ rovnici vykrátíme

$a_n = 2^{n-1}a_1 \quad \Rightarrow$ máme prakticky hotovo $\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

zkusíme i druhý příklad:

$a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N \;\Rightarrow$ platí:

$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2$$
$$a_4 = a_3 + 2$$
$$...$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2$$
$$a_n = a_{n-1} + 2$$

Předchozí rovnice sečteme:

$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = 2 + a_1 + 2 + a_2 + 2 + a_3 \cdot + ... + a_{n-2} + 2 + a_{n-1} + 2$

členy vyskytující se na obou stranách rovnice odečteme: $a_n = 2(n-1) + a_1$

$\Rightarrow$ máme prakticky hotovo, roznásobíme závorku a přičteme a_1: $a_n = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$

posloupnost je dána vzorcem: $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad samozřejmě počítám u tabule, pouze u bodu b) zkouším studenty chvíli nechat, jestli by je nenapadlo členy posloupnosti místo násobení sečíst.

Př. 5: Pomocí jednoho z postupů použitých v příkladu 3 najdi vzorec pro *n*-tý člen u posloupnosti, která je rekurentně dána takto: $a_1 = 15; a_{n+1} = a_n - 3; n \in N$.

Podobně jako v předchozích případech vypíšu členy posloupnosti:

$$a_2 = a_1 - 3$$
$$a_3 = a_2 - 3$$
$$a_4 = a_3 - 3$$
$$...$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} - 3$$
$$a_n = a_{n-1} - 3$$

Pokud chceme členy $a_2, ..., a_{n-1}$ na obou stranách rovnice odstranit, musíme rovnice navzájem sečíst (při vynásobení by se pravá strana neuvěřitelně zkomplikovala):

$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 - 3 + a_2 - 3 + a_3 - 3 + ... + a_{n-2} - 3 + a_{n-1} - 3$

členy vyskytující se na obou stranách rovnice odečteme: $a_n = a_1 - 3(n-1)$

$\Rightarrow$ máme prakticky hotovo, roznásobíme závorku a přičteme a_1: $a_n = 15 - 3n + 3 = 18 - 3n$

posloupnost je dána vzorcem: $(18-3n)_{n=1}^{\infty}$

Nejznámější rekurentně danou posloupností je asi Fibonacciho posloupnost (její členy pak bývají označovány jako Fibonacciho čísla). Původně byla zadána takto:

Př. 6: Kdosi umístil pár králíků na určitém místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí průběhem jednoho roku, jestliže u králíku je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá.
Urči počet králíků na konci roku.

Zkusíme nejdříve postupovat úvahou:

konec 1. měsíce	2 páry (původní + nově narozený)
konec 2. měsíce	3 páry (původní + narozený v prvním měsíci + narozený v druhém měsíci)
konec 3. měsíce	5 párů (3 páry, které žily na konci předchozího měsíce + 2 páry nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci)
konec 4. měsíce	8 párů (5 párů, které žily na konci předchozího měsíce + 3 páry nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci a páru narozeného ve druhém měsíci)
konec 5. měsíce	13 párů (8 párů, které žily na konci předchozího měsíce + 5 páry nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci a páru narozeného ve druhém měsíci a dvou párů narozených ve třetím měsíci)

začíná se to komplikovat. Podíváme se na dosavadní výsledky a zkusíme najít jednodušší systém pro výpočet:
počet párů na konci měsíce = páry na konci předchozího měsíce (ty neumřou) + páry nově narozené (jejich počet je stejný jako počet párů v předpředchozím měsíci, protože všechny tyto páry jsou dost staré, aby mohly rodit)
$\Rightarrow$ platí: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
můžeme to pojmout jako rekurentně zadanou posloupnost:
$a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$
$1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377$
Na konci roku bude v ohradě 377 párů králíků.

Př. 7: Petáková:
strana 66/cvičení 4 a) b) c)
strana 66/cvičení 5 a) b) c)

Shrnutí: