8.1.3 Rekurentní zadání posloupnosti

Předpoklady: 8101, 8102

Pedagogická poznámka: Podle mých zkušeností je pro studenty pochopitelnější zavádět rekurentní posloupnost takto (snadno kontrolovatelnou ukázkou), než dosazováním do rekurentního vzorce, jak je to uděláno v učebnici ($a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow n = 2 : a_{2+1} = 2a_2$).

Př. 1: Napiš prvních pět členů posloupnosti $(6-2n)_{n=1}^{\infty}$. Zkus najít jiné vyjádření posloupnosti než pomocí vzorce pro *n*-tý člen.

Nic jednoduššího (dosazujeme do vzorce za *n*) $\Rightarrow$ $4;2;0;-2;-4;\dots$.
Jiné vyjádření: využijeme fakt, že každý člen posloupnosti je o dva menší než člen předchozí $\Rightarrow$ první člen posloupnosti je 4 a každý další člen je o dva menší než člen před ním.

zkráceně píšeme: $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$

- $a_1 = 4 \Leftrightarrow$ první člen je 4
- $a_{n+1} = a_n - 2$ $\Leftrightarrow$ každý další člen je o dva menší než člen před ním
- $n \in N$ $\Leftrightarrow$ jde o nekonečnou posloupnost, za *n* dosazuji všechna přirozená čísla

Tento způsob zadání posloupnosti pomocí předchozího členu se nazývá **rekurentní zadání posloupnosti** (od latinského recurrere = vrátit se , jít zpět)

Př. 2: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností:
a) $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$
b) $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$
c) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$
d) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$
e) $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)^2; n \in N$

a) $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$
první člen je 3 a každý člen je o dva větší než člen předchozí
$3;5;7;9;11;13;15;\dots$

b) $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$
první člen je $-\frac{1}{4}$ a každý člen je (-2) násobek předchozího členu
$$a_2 = (-2)a_1 = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$a_3 = (-2)a_2 = (-2)\frac{1}{2} = -1 \quad \dots$

$-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; 2; -4; 8; -16; \dots$

c) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$
první člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že od druhé mocniny předchozí hodnoty odečteme dvojnásobek předchozí hodnoty

$a_2 = a_1^2 - 2a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

$a_3 = a_2^2 - 2a_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \quad \dots$

$1; -1; 3; 3; 3; 3; 3; \dots$

d) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$
první člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že k předchozí hodnotě přičteme pořadí předchozí hodnoty v řadě

$a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4 \quad \dots$

$1; 2; 4; 7; 11; 16; 22; \dots$

e) $a_1 = 2; a_{n+1} = 3|a_n| - (n+1)^2; n \in N$
první člen je 2 a každý další člen spočítáme tak, že od trojnásobku absolutní hodnoty předchozí hodnoty odečteme druhou mocninu pořadí počítané hodnoty

$a_2 = 3|a_1| - (1+1)^2 = 3|2| - (1+1)^2 = 2$

$a_3 = 3|a_2| - (2+1)^2 = 3|2| - (2+1)^2 = -3 \quad \dots$

$2; 2; -3; -7; -4; -24; 23; \dots$

Pedagogická poznámka: Problémy nastávají v bodech b) c) d). Vždycky chci, aby studenti napsali, jaké hodnoty do posloupnosti spočítají oni a pak se bavíme o tom, co je na jejich představě špatně. Ty, co neví, odkazuji na ukázkový příklad. Je potřeba, aby všichni spočítali bod d).

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady jsou orientovány na orientaci v posloupnostech. Na začátku hodiny nejsou umístěny schválně, protože právě první dva příklady studenty orientaci ve členech posloupnosti učí.

Př. 3: Je dána posloupnost $2; \sqrt{3}; -7; \frac{2}{3}; \pi^2; 123; -3; 1966; -81$. Urči čísla: a_{n+1}; n; a_{n-1}; a_{n+2}; $n-3$, pokud platí: $a_n = -3$.

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$2;$	$\sqrt{3};$	$-7;$	$\frac{2}{3};$	$\pi^2;$	$123;$	$-3;$	$1966;$	-81

člen $a_n = -3$ je vyznačen červeně. Z obrázku je vidět:

$a_{n+1} = 1966$ (člen následující za členem $a_n = -3$)
$n = 7$ (červený člen je sedmý v řadě)
$a_{n-1} = 123$ (člen předcházející členu $a_n = -3$)
$a_{n+2} = -81$ (člen následující za členem $a_{n+1} = 1966$)
$n - 3 = 4$ (červený člen je sedmý v řadě, člen který ho o tři předchází je čtvrtý)

Př. 4: Je dána posloupnost $2; \sqrt{3}; -7; \frac{2}{3}; \pi^2; 123; -3; 1966; -81$. Urči čísla: a_{n+1}; n; a_{n-2}; a_{n+2}; $n-3$, pokud platí: $a_{n-1} = -7$.

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$2;$	$\sqrt{3};$	$-7;$	$\frac{2}{3};$	$\pi^2;$	$123;$	$-3;$	$1966;$	-81

člen $a_{n-1} = -7$ je vyznačen červeně. Člen $a_n = \frac{2}{3}$ následuje po členu a_{n-1}, označíme si ho modře. Z obrázku je vidět:

$a_{n+1} = \pi^2$ (člen následující za členem $a_n = \frac{2}{3}$)
$n = 4$ (modrý člen je čtvrtý v řadě)
$a_{n-2} = \sqrt{3}$ (člen předcházející členu $a_{n-1} = -7$)
$a_{n+2} = 123$ (člen následující za členem $a_{n+1} = \pi^2$)
$n - 3 = 1$ (modrý člen je čtvrtý v řadě, člen který ho o tři předchází je první)

Př. 5: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadané posloupnosti
$a_1 = 2; a_2 = 1; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N$.

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow$ další hodnotu počítám z předchozí hodnoty a hodnoty, která předchází předchozí hodnotu

$2;1;$
$a_3 = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2;1;-1$
$a_4 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2;1;-1;-2$
$2;1;-1;-2;-1;1;2;\ldots$

Př. 6: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností:

a) $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$
b) $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; n \in N$
c) $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; n \in N$
d) $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$
e) $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$

a) $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 4 = 7$
$1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...$

b) $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; n \in N$
$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot (-1) - 2 = -4$
$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot (-4) - (-1) = -7$
$2; -1; -4; -7; -10; -13; -16; ...$

c) $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 - 2a_1 = (-1) - 2 \cdot 3 = -7$
$a_4 = a_3 - 2a_2 = -7 - 2 \cdot (-1) = -5$
$3; -1; -7; -5; 9; 19; 1; ...$

d) $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 + a_2 \cdot a_1 = -1 + (-1) \cdot 1 = -2$
$a_4 = a_3 + a_3 \cdot a_2 = -2 + (-2) \cdot (-1) = 0$
$1; -1; -2; 0; 0; 0; 0; ...$

e) $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$
nejde, chybí mi druhé startovní číslo

Př. 7: Urči desátý člen rekurentně zadané posloupnosti: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N$.

Bohužel musím spočítat všechny členy před desátým:
$1; 2; 1; -1; -2; -1; 1; 2; 1; -1$
Desátým členem posloupnosti je číslo -1

Předchozí příklad ukazuje asi největší nevýhodu rekurentně zadaných posloupností – i když mě zajímá konkrétní člen a ne členy před ním, stejně je musím určit, abych zjistil hodnotu toho, který mě zajímá.
Některé posloupnosti jinak než rekurentně zadat nejde (a rekurentní zadání je možné jen u posloupností).

Shrnutí: Posloupnost je možné zadat i pomocí odkazu na předcházející členy – rekurentně.