8.1.1 Posloupnosti

Předpoklady: 2104

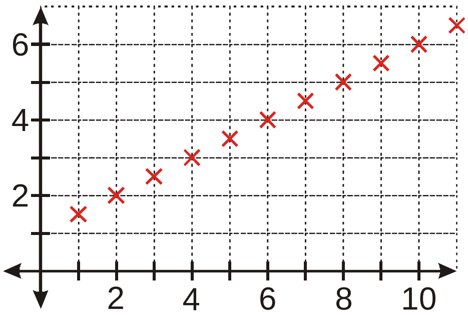
Začínáme návratem do blahých časů nevědomosti prvního ročníku - co je funkce?

Funkce na množině $A \subset R$ je předpis, který každému číslu z množiny *A* přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množinu *A* nazýváme **definiční obor funkce**.

Zkusíme si několik funkcí.

Př. 1: Je dána funkce $f(x) = 1 + 0,5x$, $x \in N$. Zapiš tabulku hodnot pro prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf této funkce.

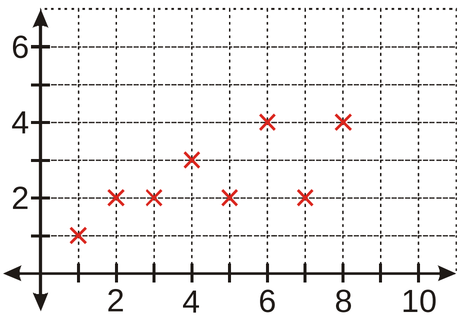
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5



Pedagogická poznámka: Téměř všichni studenti nakreslí na první pokus graf předchozí funkce špatně, protože body spojí čárou. Neříkám jim, kde je problém, jenom je upozorním, že nemají výsledek dobře.

Př. 2: Je dána funkce $g(x)$, $x \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Hodnotou funkce $g(x)$ je počet všech dělitelů čísla (tedy včetně jedničky a čísla *x*). Zapiš tabulku hodnot a sestroj graf funkčních hodnot této funkce.

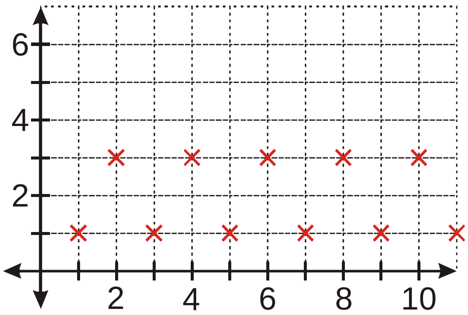
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4



Pedagogická poznámka: Předchozí posloupnost je zajímavá svým zadáním. Část studentů má značné problémy přiřazovat podle tohoto předpisu správné hodnoty.

Př. 3: Je dána funkce $h(x) = (-1)^x + 2$, $x \in N$. Zapiš tabulku hodnot pro prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	3	1	3	1	3	1	3



Pedagogická poznámka: Posloupnost je zajímavá jako příklad „přeskakovací“ posloupnosti, která díky mocnině (-1) neustále mění znaménko.

Co mají naše funkce společného?

Definiční obor je podmnožina množiny přirozených čísel, začínající u jedničky a končící u nějakého čísla nebo pokračující do nekonečna $\Rightarrow$ jenom díky tomu mají význam věty jako:

- prvních osm funkčních hodnot
- následující hodnota
- předchozí hodnota

Nic takového nemůžeme říct o funkci s definičním oborem *R*.

Jak jsou posloupnosti definovány?
Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina *N* všech přirozených čísel, se nazývá **nekonečná posloupnost**.
Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \le n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z *N*, se nazývá **konečná posloupnost**.

Př. 4: Vysvětli proč množina všech sudých přirozených čísel nemůže být definičním oborem nekonečné posloupnosti.

Definičním oborem nekonečné posloupnosti může být pouze množin všech přirozených čísel. V množině sudých čísel chybí lichá čísla.

Př. 5: Napiš konečnou podmnožinu množiny přirozených čísel, která nemůže být definičním oborem žádné konečné posloupnosti.

Konečná posloupnost má za definiční obor podmnožinu všech přirozených čísel menších než číslo n_0 $\Rightarrow$ každá nekompletní podmnožina nemůže být definičním oborem. Například jde o množinu $\{1;2;5\}$.

U posloupností používáme jiné značení i jiné pojmenování než u funkcí.

$g(4)=3$ hodnota v bodě 4 je rovna 3	$g_4=3$ člen g_4 je roven 3
$f(x)=y$ hodnota funkce *f* v bodě *x* se rovná *y*	$f_n=s$ *n*-tý člen posloupnosti *f* je roven *s*
$f(x): y=(-1)^x+2, x\in N$	$\left((-1)^n+2\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n=(-1)^n+2$

Př. 6: Pomocí zápisu pro posloupnosti zapiš:

a) $f(x)=\frac{x}{x+1}, x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

b) $g(x)=2^x+x, x\in N$

c) $h(x)=\frac{1}{x^2}, x\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$

a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{6}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{6}$, $f_n=\frac{n}{n+1}$

b) $\left(2^n+n\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n=2^n+n$

c) **nejde o posloupnost**

Dodatek: Funkci z bodu c) by přesto, že nejde o posloupnost, bylo možné zapsat ve tvaru pro posloupnosti používaném takto $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=3}^{9}$ nebo $(h_n)_{n=3}^{9}$, $h_n=\frac{1}{n^2}$.

Protože první řádek v tabulkách všech posloupností je stejný (liší se pouze v délce) je možné ho vynechat a psát místo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4

pouze: 1; 2; 2; 3; 2; 4; 2; 4

POZOR: Čísla musíme psát ve stejném pořadí v jaké se vyskytují v *y*-ovém řádku tabulky. Že hodnota 1,5 vznikla z jedničky víme jen díky tomu, že je uvedena první $\Rightarrow$ stejná čísla v jiném pořadí udávají jinou posloupnost.

Pokud je posloupnost nekonečná, píšeme poslední napsanou hodnotu řady tři tečky:

x	1	2	3	4	5	6	7	8

y	1	3	1	3	1	3	1	3

pouze: 1; 3; 1; 3; 1; …

Př. 7: Je dána posloupnost $2;\sqrt{3};-7;\frac{2}{3};\pi^2;123;-3;1966;-81$. Urči: $a_1;a_4;a_5;a_8$.

Z posloupnosti hned můžeme psát:

$a_1 = 2$ $\qquad a_4 = \frac{2}{3}$ $\qquad a_5 = \pi^2$ $\qquad a_8 = 1966$

Shrnutí: Definičním oborem posloupností jsou speciální podmnožiny přirozených čísel, které nám umožňují indexovat jejich hodnoty.