7.5.23 Kulová plocha

Př. 1: Vyslov definici kulové plochy.

$(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2=r^2 \Rightarrow$ **středová rovnice kulové plochy**.

Př. 2: Napiš středovou rovnici kulové plochy se středem v bodě $S[2;1;-2]$ a poloměrem 3.

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$ - **obecná rovnice kulové plochy**

Př. 3: Najdi průsečíky kulové plochy $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$ s osami soustavy souřadnic.

$[x;0;0] \Rightarrow x^2-4x=0 \quad (x-4)x=0 \qquad X_1[0;0;0]$ a $X_2[4;0;0]$.

$[0;y;0] \Rightarrow y^2-2y=0 \qquad (y-2)y=0 \Rightarrow Y_1[0;0;0]$ a $Y_2[4;0;0]$.

$[0;0;z] \Rightarrow z^2+4z=0 \qquad (z+4)z=0 \Rightarrow Z_1[0;0;0]$ a $Z_2[4;0;0]$.

Př. 4: Urči střed a poloměr kulové plochy dané obecnou rovnicí:
a) $x^2+y^2+z^2-2x+6z+2=0$, b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+36=0$,
c) $x^2+y^2+z^2-3x+y-4z+1=0$.

a) $$x^2+y^2+z^2-2x+6z+2=x^2-2x+1-1+y^2+z^2+2z\cdot 3+3^2-3^2+2=$$
$$=(x-1)^2+y^2+(z+3)^2-8=0$$

$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=8 \qquad \Rightarrow S[1;0;-3],\ r=\sqrt{8}$

b)

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+36=x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2+y^2+2y+1-1+z^2-2z\cdot 4+4^2-4^2+36=$$
$$=(x-2)^2-2^2+(y+1)^2-1+(z-4)^2-4^2+36=0$$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=-15$ Nejde o rovnici kulové plochy

$$x^2+y^2+z^2-3x+y-4z+1=$$

c) $$=x^2-2x\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2+2y\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2-2z\cdot 2+2^2-2^2+1=$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+(z-2)^2-4+1=0$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)+(z-2)^2=\frac{11}{2} \Rightarrow S\left[\frac{3}{2};-\frac{1}{2};2\right],\ r=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

Př. 5: Jaké jsou možnosti vzájemné polohy kulové plochy a roviny? Která vzdálenost rozhoduje o této poloze?

Př. 6: Je dána kulová plocha $S[1;2;-1]$ $r=3$ a rovina $2x+y-2z+d=0$. Pro které hodnoty parametru *d* je má je průsečíkem kulové plochy s rovinou kružnice?

$|S\rho| = \frac{|2x+y-2z+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$. $\quad \frac{|2\cdot 1+2-2(-1)+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3$. $\quad \frac{|6+d|}{3} = 3$

$|d-(-6)| = 9$ $\Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od čísla –6 o 9 $\Rightarrow$ dvě řešení (podle očekávání):

- $d_1 = 3$ $\Rightarrow$ tečná rovina $2x+y-2z+3=0$,
- $d_2 = -15$ $\Rightarrow$ tečná rovina $2x+y-2z-15=0$.

Kružnice je průsečíkem kulové plochy s rovinou $2x+y-2z+d=0$ pokud hodnota parametru *d* náleží do intervalu $(-15;3)$.

Př. 7: Najdi tečnou rovinu kulové plochy $(x-2)^2+(y+1)^2+(x-4)^2=36$ v jejím bodě $T[-2;3;6]$.

Střed kulové plochy: $S[2;-1;4]$. $\quad T-S=(-4;4;2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_\rho=(2;-2;-1)$.

Obecná rovnice roviny: $2x-2y-z+d=0$. bod *T*: $2(-2)-2\cdot 3-6+d=0 \Rightarrow d=16$.

Hledanou tečnou rovinou je rovina $2x-2y-z-16=0$.

Př. 8: Jaké jsou možnosti vzájemné polohy kulové plochy a přímky? Která vzdálenost rozhoduje o této poloze?

Př. 9: Najdi průsečíky přímky *KL* s kulovou plochou $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$. Podle jejich počtu urči vzájemnou polohu přímky s kulovou plochou. $K[1;6;-5]$, $L[0;7;-9]$.

Směrový vektor: $K-L=(1;-1;4)$ $\Rightarrow$ parametrické vyjádření: $\begin{array}{l} x=1+t \\ y=6-t \\ z=-5+4t, t\in R \end{array}$.

$(1+t-1)^2+(6-t-3)^2+(-5+4t-1)^2=9 \qquad t^2+(3-t)^2+(4t-6)^2=9$

$t^2+9+6t+t^2+16t^2-48t+36=9 \qquad 18t^2-54t+36=0 \quad /:18 \qquad t^2-3t+2=0$

$(t-2)(t-1)=0$ $\Rightarrow$ dva průsečíky:

- $t=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1+1=2 \\ y=6-1=5 \\ z=-5+4\cdot 1=-1 \end{array} \Rightarrow P_1[2;5;-1]$,
- $t=2 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1+2=3 \\ y=6-2=4 \\ z=-5+4\cdot 2=3 \end{array} \Rightarrow P_2[3;4;3]$.

Přímka *KL* má s kulovou plochou dva průsečíky $P_1[2;5;-1]$ a $P_2[3;4;3]$.