7.5.19 Hledání hyperbol

Př. 1: Napiš rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $E[-5;3]$, $F[7;3]$ a hlavní poloosu o délce 5.

$S[1;3]$. Úsečka EF je rovnoběžná s osou x $\Rightarrow$ hlavní poloosou je $a=5$.

$e=|SE|=6$. $e^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{e^2-a^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$.

Rovnice hyperboly: $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-3)^2}{11}=1$

Př. 2: Najdi rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $E[2;-3]$, $F[2;1]$.

$S[2;-1]$. $e=|SE|=2$. Hyperbola je rovnoosá $\Rightarrow$ platí $a=b$.

$e^2=2a^2 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{e^2}{2}}=\sqrt{\frac{2^2}{2}}=\sqrt{2}$ Rovnice hyperboly: $\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2}=1$.

Př. 3: Osy hyperboly jsou shodné s osami soustavy souřadnic, excentricita se rovná 5 a hyperbola prochází bodem $M[3;-4]$. Urči její rovnici.

Hlavní osou hyperboly je osa *x* $\Rightarrow$ hyperbola má rovnici $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$e=5 \Rightarrow a^2+b^2=25 \Rightarrow b^2=25-a^2$. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$.

$M[3;-4]$: $\frac{3^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{25-a^2}=1 \quad / \cdot a^2(25-a^2)$. $9(25-a^2)-16a^2=a^2(25-a^2)$

$225-9a^2-16a^2=25a^2-a^4$ $a^4-50a^2+225=0$ provedeme substituci $a^2=x$.

$x^2-50x+225=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-50)\pm\sqrt{(-50)^2-4\cdot1\cdot225}}{2\cdot1}=\frac{50\pm40}{2}$

- $x_1=\frac{50+40}{2}=45 \Rightarrow a_1^2=40 \Rightarrow b^2=16-a^2=16-40=-24$ nesmysl není řešení.
- $x_2=\frac{50-40}{2}=5 \Rightarrow a_2^2=5 \Rightarrow b^2=25-a^2=25-5=20 \Rightarrow \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

Teď druhá možnost: **Hlavní osou hyperboly je osa *y*** $\Rightarrow$ hyperbola má rovnici $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

O $b^2=25-a^2$ do rovnice: $\frac{y^2}{25-a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. $M[3;-4]$: $\frac{(-4)^2}{25-a^2}-\frac{3^2}{a^2}=1 \quad / \cdot a^2(25-a^2)$.

$16a^2-9(25-a^2)=a^2(25-a^2)$ $16a^2-225+9a^2=25a^2-a^4$

$a^4-225=0$ $a^4-15^2=0$ $(a^2-15)(a^2+15)=0$

- $a_1^2=15 \Rightarrow b^2=25-a^2=25-15=10 \Rightarrow \frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$
- $a_2^2=-15 \Rightarrow$ nesmysl, druhá mocnina nemůže být záporná.

Př. 4: Napiš rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je shodná s osou *x* a vedlejší s osou *y* a která prochází body $M\left[2;\sqrt{6}\right]$ a $N\left[\sqrt{3};2\right]$.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow M\left[2;\sqrt{6}\right]: \frac{2^2}{a^2}-\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2 . N\left[\sqrt{3};2\right]: \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}-\frac{2^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2 .$

$4b^2-6a^2=a^2b^2$ $\quad 3b^2-4a^2=a^2b^2$ $\quad$ provedeme substituci: $a^2=x, b^2=y$

$4y-6x=xy$

$3y-4x=xy$ $\quad y-2x=0 \Rightarrow y=2x .$ $\quad 4\cdot 2x-6x=x\cdot 2x .$

$2x=2x^2$ $\quad x^2-x=0$ $\quad x(x-1)=0$

- $x_1=a_1^2=0$ nesmysl, poloosa nemůže být nulová.
- $x_2=1=a^2$ rozumný výsledek $y=2x=2\cdot 1=2=b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$.

Př. 5: Napiš rovnici hyperboly, jestliže její asymptoty mají rovnice $y=\pm 2x-1$ a ohnisko je v bodě $F[5;-1]$.

Asymptoty se protínají v bodě $S[0;-1]$, který je středem hyperboly.

$e=|SF|=5 .$ $\quad \Rightarrow \frac{b}{a}=k=2 \Rightarrow b=2a$ $\quad e^2=5^2=a^2+b^2=a^2+(2a)^2=5a^2$

$a^2=5 \Rightarrow a=\sqrt{5}$ $\quad b=2a=2\sqrt{5}$ $\quad$ Rovnice hledané hyperboly: $\frac{x^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{20}=1$.

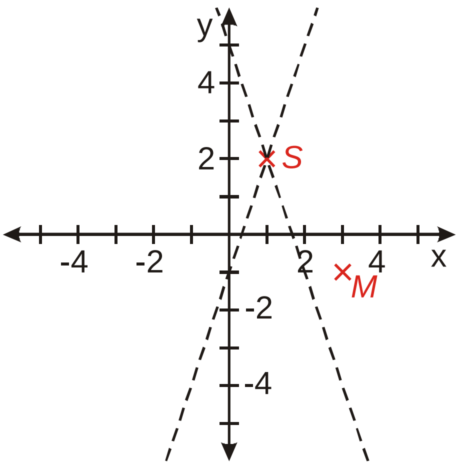
Př. 6: Najdi rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[3;-1]$ a jejíž asymptoty mají rovnice: $a_1: 3x-y-1=0$, $a_2: 3x+y-5=0$.

- $a_1: 3x-y-1=0 \Rightarrow 3x=y+1$
- $a_2: 3x+y-5=0 \Rightarrow 3x=5-y$

Srovnáme obě rovnice: $y+1=5-y$. $\quad 2y=4$ $\quad y=2$

Dopočítáme *x*: $3x-y-1=3x-2-1=0$. $\quad x=1$ $\quad$ Hyperbola má střed v bodě $S[1;2]$.

Ze směrnic asymptot určíme poměr poloos: $k=3=\frac{b}{a} \Rightarrow b=3a$.



M leží napravo od asymptot $\Rightarrow$

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{(3a)^2}=1.$$

$$M[3;-1] \quad \frac{(3-1)^2}{a^2}-\frac{(-1-2)^2}{(3a)^2}=1.$$

$$\frac{4}{a^2}-\frac{9}{9a^2}=1 \quad / \cdot 9a^2 \qquad 36-9=9a^2$$

$$a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3} \quad b=3a=3\sqrt{3}.$$

$$\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{27}=1.$$

Př. 7: Petáková:
strana 126/cvičení 43
strana 126/cvičení 48
strana 126/cvičení 52
strana 126/cvičení 53