7.5.18 Obecná rovnice hyperboly

Předpoklady: 7517

Př. 1: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly $\frac{(y-1)^2}{3}-(x+2)^2=1$.

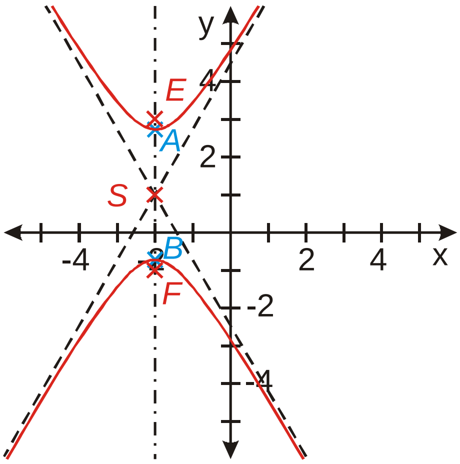
Hlavní osou je přímka $x=-2$, střed $S[-2;1]$.

Hlavní poloosa: $b=\sqrt{3}$, vedlejší poloosa $b=1$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow e=2$.

Vrcholy: $A\left[-2;1+\sqrt{3}\right]$, $B\left[-2;1-\sqrt{3}\right]$, ohniska: $E[-2;-1]$, $F[-2;3]$.

Rovnice asymptot: $x+2=\frac{y-1}{\sqrt{3}}$, $x+2=-\frac{y-1}{\sqrt{3}}$.



Stejně jako u ostatních kuželoseček získáme po roznásobení a odstranění zlomků obecnou rovnici hyperboly.

Středovou rovnici hyperboly můžem upravit do tvaru:
$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0; \quad pq<0$, který nazýváme **obecná rovnice hyperboly**.

Př. 2: Vysvětli, proč je u obecné rovnice hyperboly uvedena podmínka $pq<0$.

Musíme zajistit, aby před jedním ze členů ve středové rovnici bylo záporné znaménko. Součin pq je menší než nula, právě když je jedno z čísel p, q záporné.

Stejně jako u elipsy a paraboly nemá cenu zabývat se koeficienty v obecném tvaru. Vždy je lepší převést rovnici na středový tvar.
Při upravování rovnic je potřeba dát pozor na členy, před jejichž závorkou je mínus:
$4\left(x^2+2x+1-1\right)-\left(y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2\right)-4=4(x+1)^2-4-(y+2)^2+4-4=0 \Rightarrow$ po roznásobení zbytku závorky vznikne ze záporného čísla uvnitř závorky číslo kladné.

Pedagogická poznámka: Přes předchozí upozornění je mínus před *y*-vou závorkou nejčastější příčinou chyb při upravování obecných rovnic hyperbol.
U následujícího příkladu nechávám studenty v první fázi pouze převádět na středový tvar (novinka v tomto okamžiku). Kreslení hyperbol a určování koeficientů nebo souřadnic necháváme na zbytek hodiny nebo spíše na doma.

Př. 3: U následujících hyperbol najdi středový tvar. V případě dostatku času nakresli obrázek, vypočti souřadnice středu, vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot.

a) $4x^2-y^2+8x+4y-4=0$ b) $2x^2-4y^2+4x+8y+2=0$

c) $4x^2+8x-4y^2+4y+3=0$ d) $9x^2-4y^2+12y-45=0$

a) $4x^2-y^2+8x+4y-4=4x^2+8x-y^2+4y-4=0$

$4\left(x^2+2x+1-1\right)-\left(y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2\right)-4=0$

$4(x+1)^2-4-(y+2)^2+4-4=0$

$4(x+1)^2-(y+2)^2=4 \qquad /:4$

$(x+1)^2-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

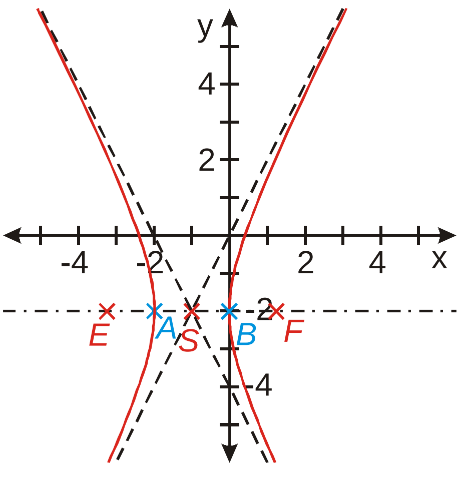
Hlavní osou je přímka $y=-2$, střed $S[-1;-2]$.

Hlavní poloosa: $a=1$, vedlejší poloosa $b=2$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+2^2}\Rightarrow e=\sqrt{5}$.

Vrcholy: $A[0;-2]$, $B[-2;-2]$, ohniska: $E\left[-1-\sqrt{5};-2\right]$, $F\left[-1+\sqrt{5};-2\right]$.

Rovnice asymptot: $x+1=\dfrac{y+2}{2}$, $x+1=-\dfrac{y+2}{2}$.



b) $2x^2-4y^2+4x+8y+2=0 \quad /:2$

$x^2-2y^2+2x+4y+1=\left(x^2+2x+1-1\right)-2\left(y^2-2y+1-1\right)+1=0$

$(x+1)^2-2(y-1)^2+1+2-1=0$

$(x+1)^2-2(y-1)^2=-2 \quad /:(-2)$

$$\frac{(x+1)^2}{-2}-\frac{2(y-1)^2}{-2}=1$$

$$(y-1)^2-\frac{(x+1)^2}{2}=1$$

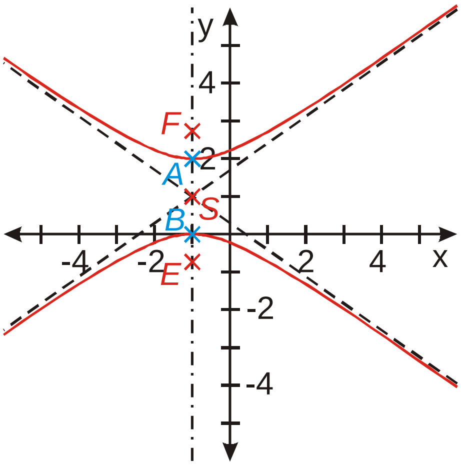
Hlavní osou je přímka $x=-1$, střed $S[-1;1]$.

Hlavní poloosa: $b=1$, vedlejší poloosa $a=\sqrt{2}$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}\Rightarrow e=\sqrt{3}$.

Vrcholy: $A[-1;2]$, $B[-1;0]$, ohniska: $E\left[-1;1-\sqrt{3}\right]$, $F\left[-1;1+\sqrt{3}\right]$.

Rovnice asymptot: $y-1=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $y-1=-\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.



c) $4x^2+8x-4y^2+4y+3=4\left(x^2+2x\right)-4\left(y^2-y\right)+3=0$

$$4\left(x^2+2x+1-1\right)-4\left[y^2-2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+3=0$$

$$4(x+1)^2-4-4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+1+3=4(x+1)^2-4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$(x+1)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$ - nejde o rovnici hyperboly.

Rozdíl můžeme rozložit na dvě závorky: $\left(x+1-y+\frac{1}{2}\right)\left(x+1+y-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow$

rovnice dvou přímek $2x-2y+3=0$, $2x+2y+1=0$.

d) $9x^2-4y^2+12y-39=9x^2-4\left(y^2-3y\right)-45=0$

$$9x^2-4\left[y^2-2y\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-45=9x^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+9-45=0$$

$$9x^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=36 \quad /:36$$

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{36}=1$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{9}=1$$

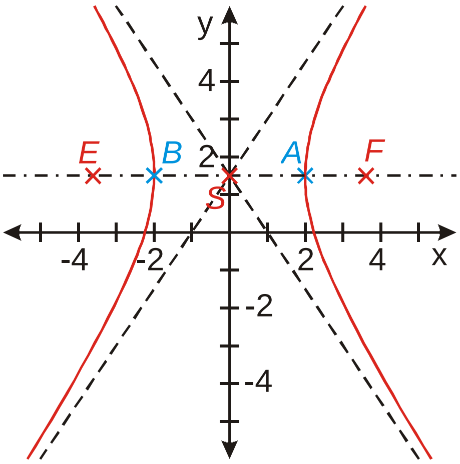
Hlavní osou je přímka $y=\frac{3}{2}$, střed $S\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Hlavní poloosa: $a=2$, vedlejší poloosa $b=3$.

Excentricita: $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+3^2}\Rightarrow e=\sqrt{13}$.

Vrcholy: $A\left[-2;\frac{3}{2}\right]$, $B\left[2;\frac{3}{2}\right]$, ohniska: $E\left[-\sqrt{13};\frac{3}{2}\right]$, $F\left[\sqrt{13};\frac{3}{2}\right]$.

Rovnice asymptot: $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{3}$, $\frac{x}{2}=-\frac{y-\frac{3}{2}}{3}$.



Př. 4: Petáková:
strana 128/cvičení 76 b) e) f)

Shrnutí: Obecná rovnice hyperboly se do středového tvaru upravuje podobně jako u elipsy.