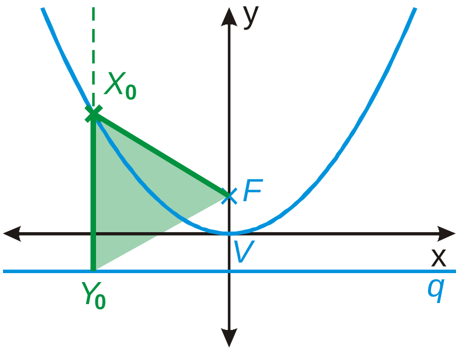
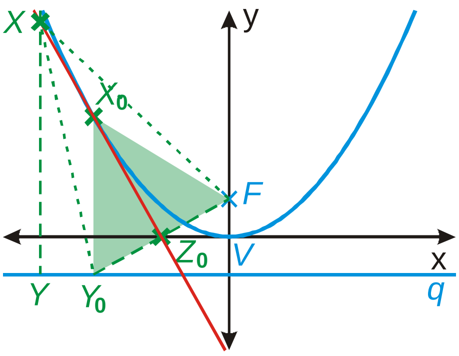
7.5.15 Parabola a přímka

Př. 1: Na obrázku je nakreslena parabola $x^2 = 2py$ s ohniskem F, řídící přímkou q a vrcholem $V[0;0]$. Bod $X_0[x_0; y_0]$ je libovolný bod paraboly různý od vrcholu. Označ patu kolmice vedené bodem X_0 na přímku q jako Y_0. Rozhodni na základě vlastností paraboly, zda vzniklý trojúhelník X_0FY_0 je obecný nebo má speciální vlastnosti (rovnostrannost, rovnoramennost, pravoúhlost …).



Z definice paraboly vyplývá: $|X_0F| = |X_0q| = |X_0Y_0| \Rightarrow$ trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný se základnou Y_0F.

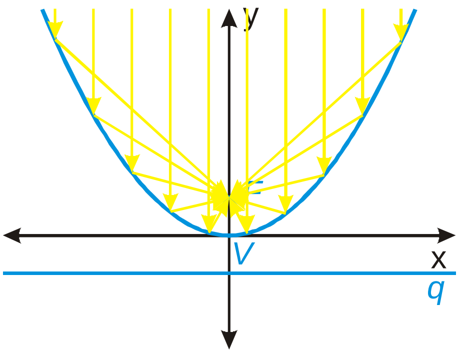
Př. 2: (BONUS) Střed úsečky FY_0 z předchozího příkladu označ Z_0. Odhadni a poté dokaž, kolik společných bodů má přímka X_0Z_0 s parabolou $x^2 = 2py$.



Trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný $\Rightarrow$ přímka Z_0X_0 je jeho osou a tedy i osou strany FY_0 $\Rightarrow$ všechny body této přímky jsou stejně vzdálené od krajních bodů F a Y_0 $\Rightarrow$ $|XF| = |XY_0|$.

Zkontrolujeme, zda bod X splňuje podmínku pro bod paraboly: $|XF| = |Xq| = |XY|$.

Z obrázku je vidět, že platí: $|XY| < |XY_0| = |XF| \Rightarrow$ $|Xq| < |XF| \Rightarrow$ bod X určitě není bodem paraboly.



Parabola u satelitu soustřeďuje paprsky signálu (které pocházejí z velmi vzdáleného zdroje a tak jsou prakticky rovnoběžné) do svého ohniska (kde je namontovaný přijímač).
Obráceně funguje parabola u reflektorů. V ohnisku parabolického zrcadla je umístěna žárovka a parabolické zrcadlo odráží paprsky z žárovky do vodorovného proudu světla.

Př. 3: Najdi rovnici tečny dané paraboly v daném bodě:

a) $(x+1)^2 = 4(y+2)$; $X_0[1;?]$ b) $y^2 = -x$; $X_0[?;2]$.

Správnost dosazení ověř výpočtem průsečíků přímky s parabolou.

a) $(x+1)^2 = 4(y+2)$ $X_0[1;?]$

Hledáme tečnu paraboly $(x+1)^2 = 4(y+2)$ v bodě $X_0[1;-1]$.

$2x+2 = 2y+4+2$ $\quad 2x-2y-4=0$ $\quad x-y-2=0$.

$x^2-2x+1=(x-1)^2=0 \Rightarrow$ jediný průsečík s x-vou souřadnicí $x=1$ (bod ze zadání).

b) $y^2 = -x$ $\quad X_0[?;2]$

Hledáme tečnu paraboly $(y-0)^2 = -2\frac{1}{2}(x-0)$ v bodě $X_0[-4;2]$.

$2y = -\frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2 \qquad 4y = -x + 4 \qquad\qquad x + 4y - 4 = 0$.

$y^2 - 4y + 4 = 0 \qquad\qquad (y-2)^2 = 0$

Př. 4: Urči vzájemnou polohu paraboly $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ a přímky $x - y - 3 = 0$.

$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3$. $\qquad x^2 - 4x - y + 1 = x^2 - 4x - (x-3) + 1 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad\qquad (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow$ dva kořeny:

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P_1[4;1]$
- $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow P_2[1;-2]$

Př. 5: Je dána parabola $(y-2)^2 = 2(x-1)$. Najdi tečny této paraboly procházející bodem $X[-3;1]$.

$X[-3;1]$: $(y-1) = k(x+3)$ a přímka $x = -3$. $\qquad\qquad y = kx + 3k + 1$.

$(kx + 3k + 1 - 2)^2 = 2(x-1) \qquad (kx + 3k - 1)(kx + 3k - 1) = 2x - 2$

$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx - 2x + 9k^2 - 6k + 3 = 0 \qquad k^2x^2 + (6k^2 - 2k - 2)x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$

$k = 0$. $\qquad$ Dosadíme: $0^2x^2 + (6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2)x + 9.0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 0$.

$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ - jediný průsečík $\Rightarrow$ pro $k = 0$ má přímka $y = kx + 3k + 1 = 1$ s parabolou

$k \neq 0: D = b^2 - 4ac = (6k^2 - 2k - 2)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$

$(3k^2 - k - 1)(3k^2 - k - 1) - k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$

$9k^4 - 3k^3 - 3k^2 - 3k^3 + k^2 + k - 3k^2 + k + 1 - 9k^4 + 6k^3 - 3k^2 = 0$

$-8k^2 + 2k + 1 = 0 \qquad\qquad 8k^2 - 2k - 1 = 0$

$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16}$

- $k_1 = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ tečna $2y - 2 = x + 3 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$
- $k_2 = \frac{2-6}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ tečna $4y - 4 = -x - 3 \Rightarrow x + 4y - 1 = 0$