

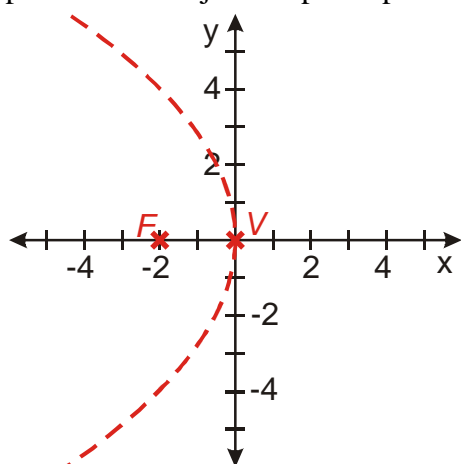
7.5.14 Hledání parabol

Předpoklady: 7512, 7513

Pedagogická poznámka: Studenti jsou po překonání počátečních problémů s paměti vcelku úspěšnější, všichni většinou zvládnou alespoň prvních pět příkladů. Hodinu organizují tak, aby nám na konci zbylo alespoň pět minut na diskusi o řešení příkladu 6.

Př. 1: Napiš rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a ohnisko v bodě $F[-2;0]$.

Parabola má vrchol v počátku a ohnisko v bodě $F[-2;0] \Rightarrow$ její osa je shodná s osou x , parabola směřuje do záporné poloroviny \Rightarrow rovnice $y^2 = -2px$.

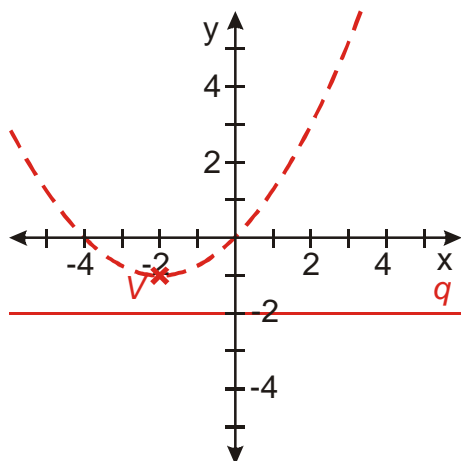


Platí $|VF| = \frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow$ rovnice paraboly: $y^2 = -2 \cdot 4x$.

Př. 2: Napiš rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V[-2;-1]$ a má řídicí přímku $y = -2$.

Řídicí přímka paraboly $y = -2$ je vodorovná \Rightarrow osa paraboly je svislá.

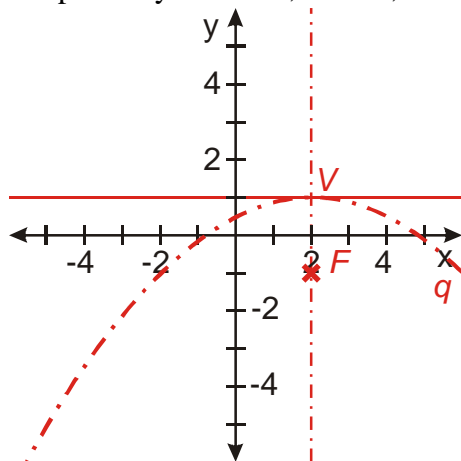
Vrchol paraboly $V[-2;-1]$ je nad řídicí přímkou \Rightarrow parabola směřuje do kladné poloroviny \Rightarrow rovnice $(x+2)^2 = 2p(y+1)$.



Platí: $|Vq| = \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow$ parabola má rovnici $(x+2)^2 = 2 \cdot 2(y+1)$.

Př. 3: Najdi rovnici paraboly, která má ohnisko v bodě $F[2; -1]$ a jejíž vrcholová tečna má rovnici $y = 1$.

Tečna ve vrcholu je kolmá na osu paraboly, osa paraboly prochází ohniskem \Rightarrow můžeme si osu paraboly nakreslit, v bodě, kde se protne s vrcholovou tečnou je vrchol paraboly.



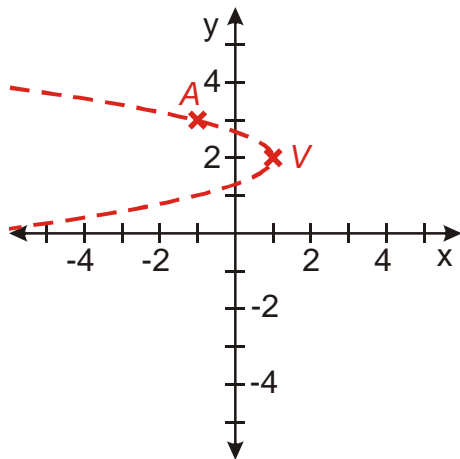
Vrchol paraboly leží v bodě $V[2; 1]$, osa paraboly je svislá, směřuje do záporné poloviny \Rightarrow rovnice $(x-2)^2 = -2p(y-1)$.

Platí $|VF| = \frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow$ parabola má rovnici $(x-2)^2 = -2 \cdot 4(y-1)$.

Pedagogická poznámka: Studenti často zaměňují vrcholovou tečnu za řídicí přímku a dochází tak k rovnici $(x-2)^2 = -2 \cdot 2(y-1)$.

Př. 4: Najdi rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V[1; 2]$, prochází bodem $A[-1; 3]$ a jejíž osa je rovnoběžná s osou x .

Osa paraboly je rovnoběžná s osou x .



Bod A je vlevo od vrcholu \Rightarrow parabola směřuje do záporné poloroviny \Rightarrow

$$\text{rovnice paraboly: } (y-2)^2 = -2p(x-1).$$

Poslední neznámou vypočteme dosazením bodu A, který musí rovnici vyhovovat:

$$(3-2)^2 = -2p(-1-1)$$

$$1^2 = -2p(-2)$$

$$p = \frac{1}{4}$$

Hledaná parabola má rovnici $(y-2)^2 = -2\frac{1}{4}(x-1)$.

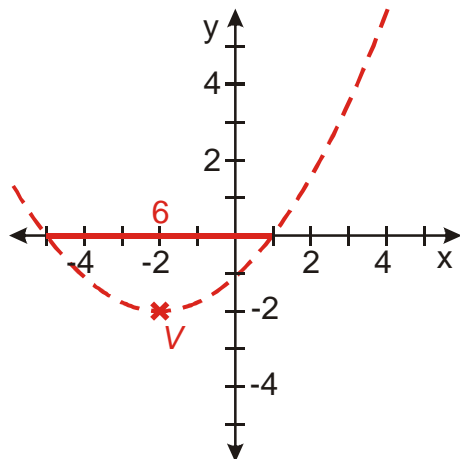
Pedagogická poznámka: U příkladu 4 mají studenti často problémy s tím, že podle předchozích příkladů automaticky předpokládají, že rovnici zjistíme ze zadaných bodů pomocí obrázku. Dobrá ukázka zkostnatělého myšlení.

Př. 5: Hledaná parabola má vrchol v bodě $V[-2; -2]$ a na ose x vytíná úsečku o délce 6. Urči její rovnici.

Vrchol paraboly se nachází pod osou x , na které vytíná konečný úsek \Rightarrow osa paraboly je svislá a směřuje do kladné poloroviny \Rightarrow rovnice paraboly: $(x+2)^2 = 2p(y+2)$.

Potřebujeme určit hodnotu parametru p , ještě jsme nevyužili údaj o vytnuté úsečce.

Nakreslíme obrázek:



Je vidět, že parabola prochází například bodem $A[1;0]$.

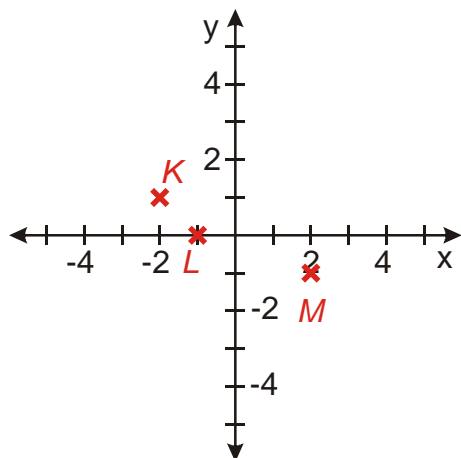
$$\text{Dosadíme bod A: } (1+2)^2 = 2p(0+2)$$

$$9 = 4p$$

$$p = \frac{9}{4}$$

Hledaná parabola má rovnici $(x+2)^2 = 2\frac{9}{4}(y+2)$.

Př. 6: Parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou x , prochází body $K[-2;1]$, $L[-1;0]$ a $M[2;-1]$. Najdi její rovnici.



Zadané body nejsou souměrné ani podle jedné ze souřadných os \Rightarrow nemůžeme využít souměrnosti paraboly \Rightarrow hledáme tři parametry ve vrcholové nebo obecné rovnici, můžeme dosazovat tři body (a získat tři rovnice).

Využijeme raději obecný tvar: $y^2 + px + qy + r = 0$.

Dosazujeme:

- $K[-2;1]$: $1^2 + p(-2) + q \cdot 1 + r = 0$
- $L[-1;0]$: $0^2 + p(-1) + q \cdot 0 + r = 0$
- $M[2;-1]$: $(-1)^2 + p \cdot 2 + q(-1) + r = 0$

$$\begin{aligned} -2p + q + r &= -1 \\ \text{Získáme soustavu rovnic:} \quad -p + r &= 0 \\ 2p - q + r &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2p + q + r &= -1 \\ -p + r &= 0 \end{aligned}$$

$$[[1]] + [[3]] \quad 2r = -2 \Rightarrow r = -1$$

Dopočítáme ostatní neznámé: $-p + r = 0 \Rightarrow p = r = -1$.

$$-2(-1) + q + (-1) = -1 \Rightarrow q = -2$$

Hledaná parabola má rovnici $y^2 - x - 2y - 1 = 0$.

$$y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = x + 1$$

$$(y-1)^2 = x + 2$$

$$(y-1)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(x+2)$$

Hledaná parabola má rovnici $(y-1)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(x+2)$.

Pedagogická poznámka: Pokud studentům příklad řešit nejde, je potřeba na ně tlačít, aby si zadání zkusili alespoň nějak nakreslit.

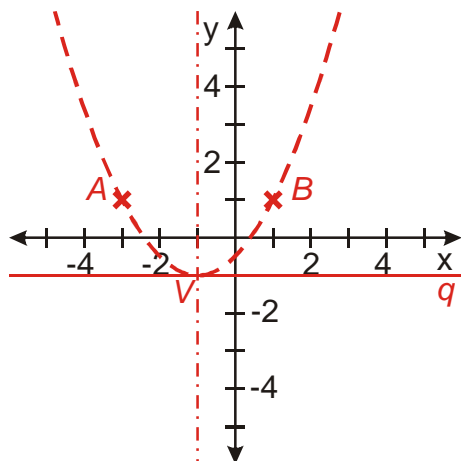
Některí studenti začnou příklad řešit tím, že prohlásí bod $K[-2;1]$ za vrchol

paraboly. Je třeba je upozornit, že ze zadání taková informace rozhodně nevyplývá a proto se na ni při řešení nemohou spoléhat.

Dalším problémem při řešení příkladu je tvar obecné rovnice paraboly. Pokud si jej studenti nepamatují, chci po nich, aby ho zkusili napsat sami.

Př. 7: Parabola prochází body $A[-3;1]$ a $B[1;1]$. Její vrcholová tečna má rovnici $y = -1$. Urči její rovnici.

Vrcholová tečna je vodorovná \Rightarrow parabola je svisle orientovaná. Nakreslíme si obrázek:



Oba zadané body paraboly jsou ve stejné výšce \Rightarrow jsou souměrné podle osy paraboly \Rightarrow osou paraboly je přímka $x = -1$.

Průsečík osy paraboly s vrcholovou tečnou je vrchol paraboly $V[-1; -1]$.

Rovnice paraboly: $(x+1)^2 = 2p(y+1)$.

Parametr p dopočteme dosazením jednoho ze zadaných bodů: $B[1;1]: (1+1)^2 = 2p(1+1)$.

$$4 = 2p \cdot 2$$

$$p = 1$$

Hledaná rovnice má tvar $(x+1)^2 = 2 \cdot 1(y+1)$.

Př. 8: Petáková:

strana 127/cvičení 59 b)

strana 127/cvičení 61 c)

strana 127/cvičení 62 a)

strana 127/cvičení 63 b)

strana 127/cvičení 65

strana 127/cvičení 68

strana 127/cvičení 70

strana 127/cvičení 72

Shrnutí: Hledání parabol není těžké, pokud si pamatujeme význam vrcholu a parametru p .