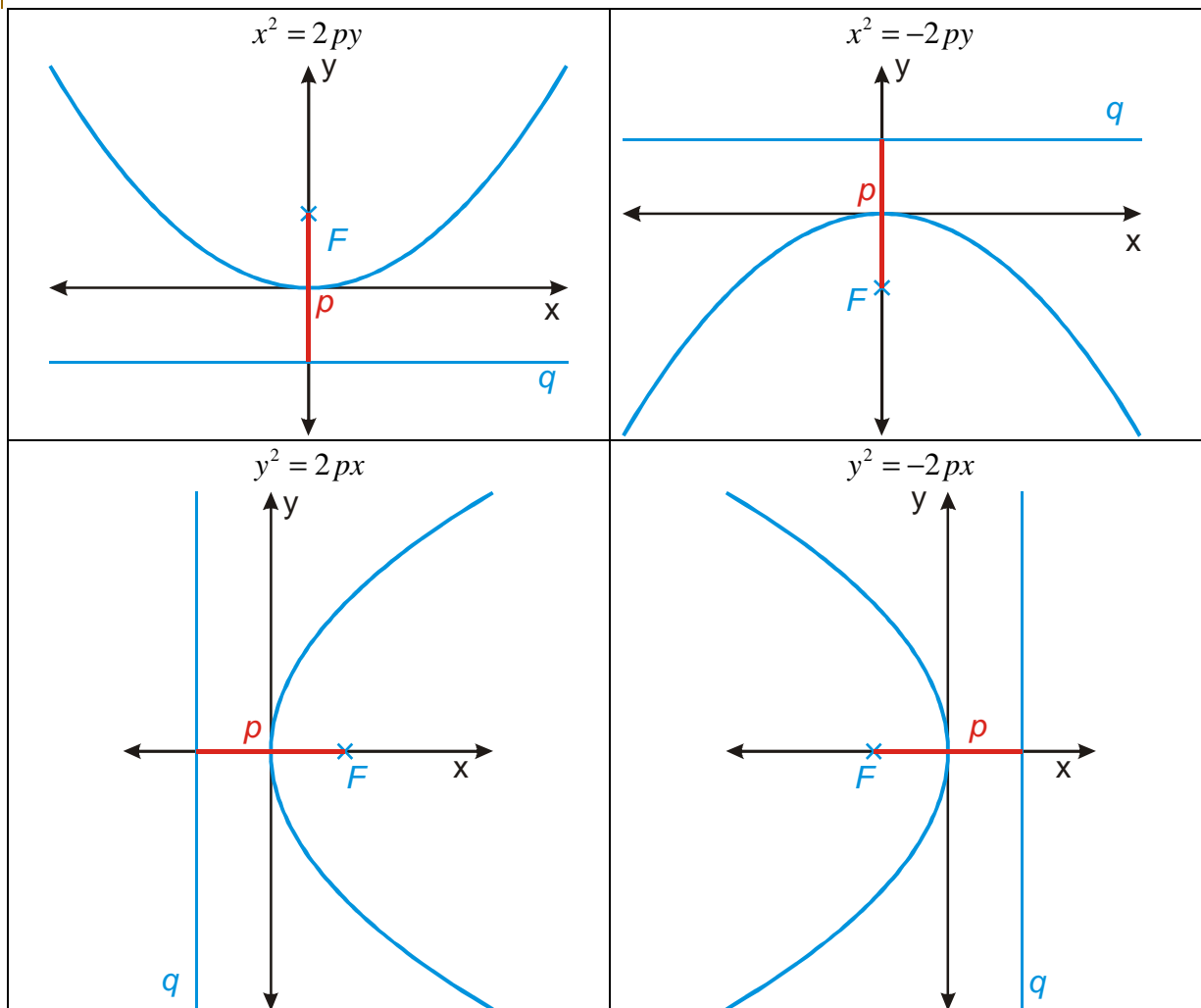


7.5.13 Rovnice paraboly

Předpoklady: 7512

Př. 1: Sepiš všechny rovnice pro paraboly a nakresli k nim odpovídající obrázky. Na každém obrázku vyznač vzdálenost p .



Pedagogická poznámka: Sepsání parabol je důležité, studenti budou v dalším průběhu hodiny často nahlížet. Stejně tak považuji za vhodné, když si studenti několikrát do obrázku nakreslí vzdálenost p , zvětšuje se tak pravděpodobnost, že si při řešení příkladů budou pamatovat její význam.

Zatím známe rovnice parabol, jejichž vrcholy leží v počátku soustavy souřadnic.

Elipsa:

- střed $S[0;0]$ v počátku \Rightarrow rovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- střed v bodě $S[m;n]$ \Rightarrow rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Jak se změní rovnice paraboly $x^2 = 2py$, kterou posuneme tak, aby se její vrchol přemístil z bodu $[0;0]$ do bodu $V[m;n]$?

Zřejmě na rovnici $(x-m)^2 = 2p(y-n)$. Rovnice se nazývá vrcholová (protože z ní můžeme zjistit souřadnice vrcholu).

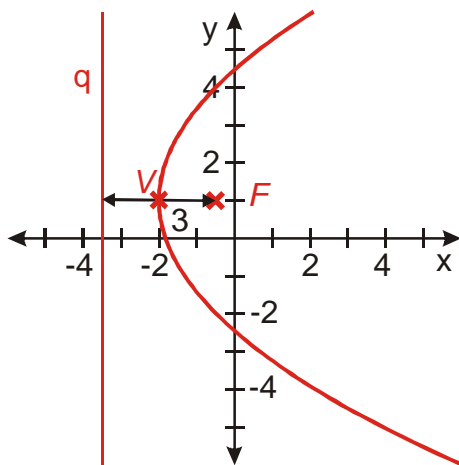
Paraboly s vrcholem v bodě $V[m;n]$ a osou rovnoběžnou s osou y a vzdáleností $|Fq| = p$ mají vrcholové rovnice $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$.

Paraboly s vrcholem v bodě $V[m;n]$ a osou rovnoběžnou s osou x a vzdáleností $|Fq| = p$ mají vrcholové rovnice $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$.

Poznámka: Stejně jako u elipsy nebudeme pracovat s parabolami, jejichž osy nejsou rovnoběžné s jednou ze souřadných os. Jejich rovnice jsou složitější.

Př. 2: Urči souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídící přímky paraboly, která je dána rovnicí $(y-1)^2 = 6(x+2)$.

Upravíme rovnici: $(y-1)^2 = 2 \cdot 3(x+2) \Rightarrow$ vrchol: $V[-2;1]$, parametr $p = 3$.

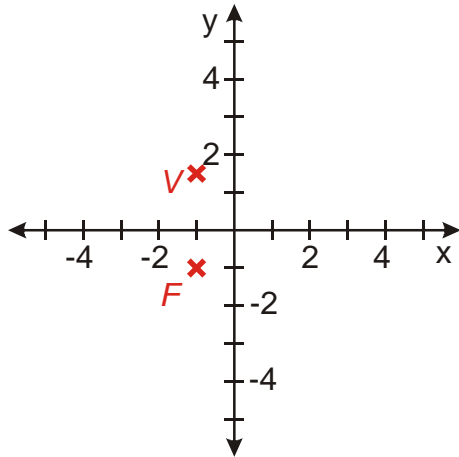


Ohnisko: $F\left[-2 + \frac{3}{2}; 1\right] = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, řídící přímka: $x = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.

Pedagogická poznámka: Objevuje se hned několik chyb z nepozornosti: souřadnice vrcholu $V[1;-2]$ (kvůli automatickému přiřazování druhé mocniny x -vé souřadnici), špatně nakreslený obrázek (parabola se svislou osou) a špatné použití parametru p (použití rovnosti $p = 6$).

Př. 3: Napiš vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem v bodě $V\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ a ohniskem $F[-1; -1]$.

Nakreslíme si oba body:



Body leží nad sebou \Rightarrow osa paraboly bude rovnoběžná s osou y , parabola bude orientována směrem dolů \Rightarrow rovnice typu $(x - m)^2 = -2p(y - n)$.

Platí: $|VF| = \frac{5}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 5$.

Dosadíme do rovnice souřadnice vrcholu a velikost p : $(x + 1)^2 = -2 \cdot 5 \left(y - \frac{3}{2}\right)$.

Pedagogická poznámka: U obou předchozích příkladů i u příkladů následujících je důležité načrtnutí obrázku paraboly. Podle obrázku je pak dopočítání požadovaných údajů snadné.

Nejčastějším problémem je, že si studenti nepamatují rovnost $|Vq| = p$ a místo ní používají špatnou $|FV| = p$.

Stejně jako u kružnice a elipsy i u vrcholové rovnice paraboly můžeme umocnit a roznásobit závorky, posčítat, co půjde, a tak získat obecnou rovnici paraboly.

Parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou y , můžeme vyjádřit také obecnou rovnicí paraboly $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$.

Parabolu, jejíž osa je rovnoběžná s osou x , můžeme vyjádřit také obecnou rovnicí paraboly $y^2 + 2rx + 2sy + t = 0$.

Stejně jako u kružnice a elipsy budeme muset převést obecnou rovnici na vrcholovou, abychom zjistili, o jakou parabolu jde.

Př. 4: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí $x^2 + 2x - 3y - 2 = 0$.
Načrtni obrázek paraboly.

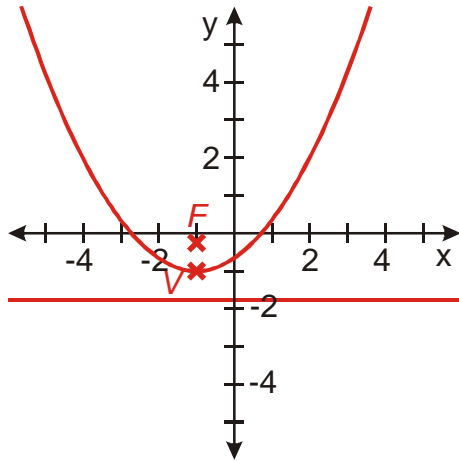
Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici x : $x^2 + 2x - 3y - 2 = 0$

$$x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = 3y + 2$$

$$(x+1)^2 = 3y+3$$

$$(x+1)^2 = 3(y+1)$$

$$(x+1)^2 = 2 \cdot \frac{3}{2} (y+1) \Rightarrow \text{vrchol: } V[-1; -1], \text{ parametr } p = \frac{3}{2}.$$



Ohnisko: $F\left[-1; -1 + \frac{3}{4}\right] = \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$, řídící přímka: $y = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$.

Př. 5: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí:

a) $x^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

b) $y^2 - 6x - 10 = 0$

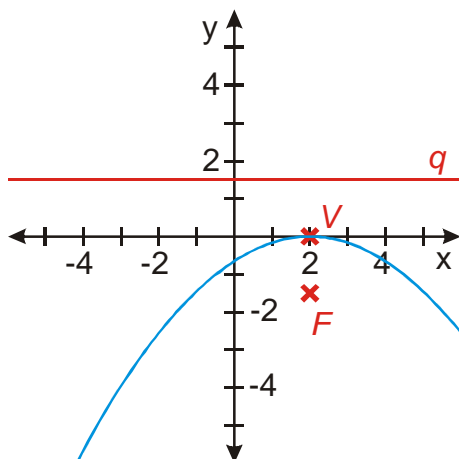
c) $y^2 + y + 4x + 3 = 0$.

a) $x^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici x : $x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 = -6y - 4$

$$(x-2)^2 - 4 = -6y - 4$$

$$(x-2)^2 = -2 \cdot 3y \Rightarrow \text{vrchol: } V[2; 0], \text{ parametr } p = 3.$$



Osa paraboly je rovnoběžná s osou y , parabola je orientována směrem dolů \Rightarrow

$$\text{ohnisko: } F\left[2; 0 - \frac{3}{2}\right] = \left[2; -\frac{3}{2}\right],$$

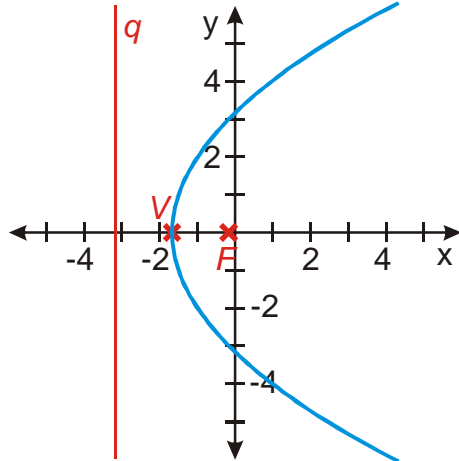
$$\text{řídící přímka: } y = \frac{3}{2}.$$

b) $y^2 - 6x - 10 = 0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici y : $y^2 = 6x + 10$.

$$y^2 = 6\left(x + \frac{10}{6}\right)$$

$$y^2 = 2 \cdot 3\left(x + \frac{5}{3}\right) \Rightarrow \text{vrchol: } V\left[-\frac{5}{3}; 0\right], \text{ parametr } p = 3.$$



Osa paraboly je rovnoběžná s osou x , parabola je orientována směrem doprava \Rightarrow

$$\text{ohnisko: } F\left[-\frac{5}{3} + \frac{3}{2}; 0\right] = \left[-\frac{1}{6}; 0\right],$$

$$\text{řídící přímka: } x = -\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{19}{6}.$$

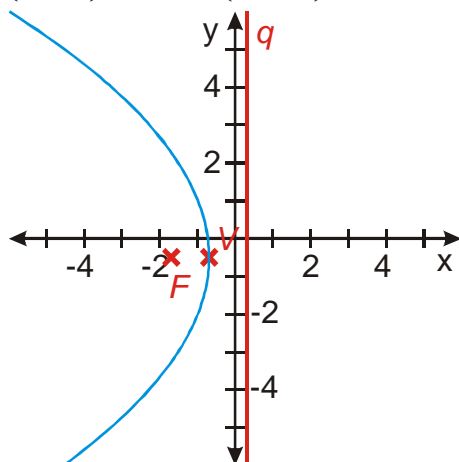
c) $y^2 + y + 4x + 3 = 0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici y : $y^2 + 2y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -4x - 3$.

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -4x - 3 + \frac{1}{4}$$

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -4x - \frac{11}{4}$$

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -2 \cdot 2\left(x + \frac{11}{16}\right) \Rightarrow \text{vrchol: } V\left[-\frac{11}{16}; -\frac{1}{2}\right], \text{ parametr } p = 2.$$



Osa paraboly je rovnoběžná s osou x , parabola je orientována směrem doleva \Rightarrow

$$\text{ohnisko: } F\left[-\frac{11}{16} - 1; -\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{27}{16}; -\frac{1}{2}\right],$$

$$\text{řídící přímka: } x = -\frac{11}{16} + 1 = \frac{5}{16}.$$

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou u bodu b), kde mnoho studentů vytýká do tvaru $y^2 = 2(3x+5)$, aby se vyhnuli zlomkům v závorce. Opět je dobré zdůraznit, že jde nematematickou myšlenku, protože nic nezakazuje zlomky v souřadnicích bodů, zatímco požadavek na to, aby se v závorce vyskytovalo pouze x nenásobené žádným číslem, vyplývá z rovnice $(y-n)^2 = -2p(x-m)$ zcela jednoznačně.

Pedagogická poznámka: Paraboly na obrázcích v učebnici jsou kresleny v reálném tvaru. Na obrázky v sešitech není dobré klást takové nároky, stačí, když budou procházet správným vrcholem a budou mít správnou orientaci.

Př. 6: (BONUS) Šikmý vrh je při vhodné volbě souřadnic popsán pomocí souřadnic takto:

$$x = vt \cos \alpha \text{ a } y = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

a) Dokaž, že body z předpisu leží na parabole. b) Najdi vrchol této paraboly.

Rovnice paraboly neobsahuje jiné proměnné než souřadnice \Rightarrow musíme ze zadané soustavy rovnic vyloučit $t \Rightarrow$ vyjádříme ho z první a dosadíme do druhé rovnice.

$$x = vt \cos \alpha \Rightarrow t = \frac{x}{v \cos \alpha} \Rightarrow y = v \frac{x}{v \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v \cos \alpha} \right)^2.$$

$$y = x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad \text{- obecná rovnice paraboly, převedeme na středový tvar.}$$

$$\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -y$$

$$\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} \left(x^2 - x \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right) = -y$$

$$x^2 - 2x \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \left(\frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 - \left(\frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 = -y \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$\left(x - \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 = -y \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} + \left(\frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2$$

$$\left(x - \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 = -y \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} + \frac{v^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \quad \text{(vytkneme tak, aby před y nebylo nic)}$$

$$\left(x - \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 = -\frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(y - \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g} \right)$$

$$\text{Souřadnice vrcholu } V \left[\frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}; \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g} \right].$$

Dodatek: Souřadnice vrcholu odpovídají vzorcům pro dostřel šikmého vrhu

$$d = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \text{ (dvojnásobek } x\text{-ové souřadnice vrcholu) a maximální výšku}$$

$$\text{výstupu } h_{\max} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g} \text{ (} y\text{-ová souřadnice vrcholu).}$$

Př. 7: Petáková:

strana 128/cvičení 77 c) e) f)

strana 129/cvičení 79 d)

Shrnutí: Vrcholovou rovnicí paraboly získáme velmi podobně jako středovou rovnicí elipsy.