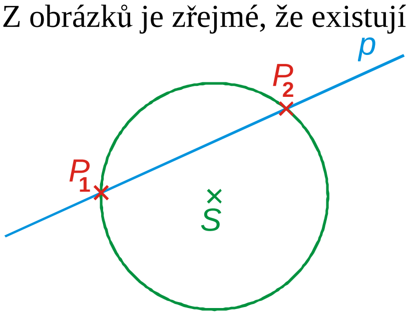
7.5.4 Kružnice a přímka

Předpoklady: 7501,

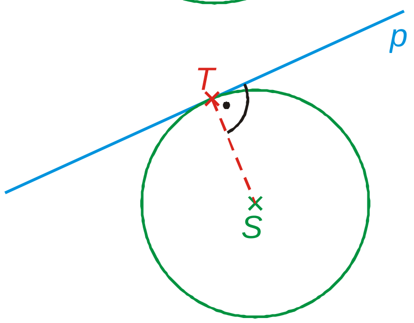
Pedagogická poznámka: Rychlost postupu v této hodině velmi závisí na tom, jakým způsobem studenti řešili kvadratické rovnice s parametrem. Pokud je vůbec nepočítali, nemá samostatné počítání příkladu 4 vůbec smysl. Nemá smysl ho počítat ani na tabuli, protože výpočet stejně nebude skoro nikdo schopen sledovat. Pokud vše půjde dobře, máte šanci obsah stihnout tak v 60 minutách.

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy kružnice a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek. Co v každém případě platí pro vzdálenost přímky od středu kružnice?

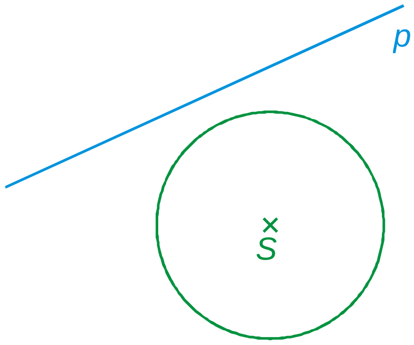
Z obrázků je zřejmé, že existují tři případy vzájemné polohy kružnice a přímky:



- Přímka se protíná s kružnicí ve dvou různých bodech.
- Říkáme, že přímka je **sečnou** kružnice.
- Vzdálenost přímky od středu kružnice je menší než poloměr kružnice.



- Přímka se protíná s kružnicí právě v jednom bodě.
- Říkáme, že přímka je **tečnou** kružnice.
- Vzdálenost přímky od středu kružnice je rovna poloměru kružnice.



- Přímka se neprotíná s kružnicí v žádném bodě.
- Říkáme, že přímka je **vnější přímkou** kružnice.
- Vzdálenost přímky od středu kružnice je větší než poloměr kružnice.

Př. 2: Najdi průsečíky kružnice $x^2+y^2-4x-2y=0$ a přímky $x+3y=0$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Ověř, zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice napsané v předcházejícím příkladě.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí $\Rightarrow$ body, které vyhovují oběma rovnicím $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic $\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y&=0 \\ x+3y&=0 \end{aligned}$.

Vyjádříme $x+3y=0 \Rightarrow x=-3y$ a dosadíme do první rovnice.

$x^2+y^2-4x-2y=(-3y)^2+y^2-4(-3y)-2y=0$

$9y^2+y^2+12y-2y=0$

$10y^2+10y=0$

$y^2+y=0$

$y(y+1)=0$

$y_1=0 \Rightarrow x_1=-3y_1=0 \Rightarrow P_1[0;0]$

$y_2=-1 \Rightarrow x_1=-3y_1=3 \Rightarrow P_1[3;-1]$

$\Rightarrow$ Dva průsečíky $\Rightarrow$ přímka $x+3y=0$ je sečnou kružnice $x^2+y^2-4x-2y=0$.

Ověříme, zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice.
Určíme poloměr kružnice $\Rightarrow$ potřebujeme středovou rovnici:

$x^2+y^2-4x-2y=x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2y\cdot 1+1^1-1^2=$

$(x-2)^2+(y-1)^2-5=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5}$

Určíme vzdálenost středu kružnice $S[2;1]$ od přímky $x+3y=0$:

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 2+3\cdot 1+0|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{2}.$$

Protože $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ platí i $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5}<\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ vzdálenost přímky od středu kružnice je menší než její poloměr.

Pedagogická poznámka: Největším problémem předchozího příkladu je vzorec pro vzdálenost dobu od přímky. I když ho napíšete na tabuli, budou mít někteří obrovské problémy s dosazením.

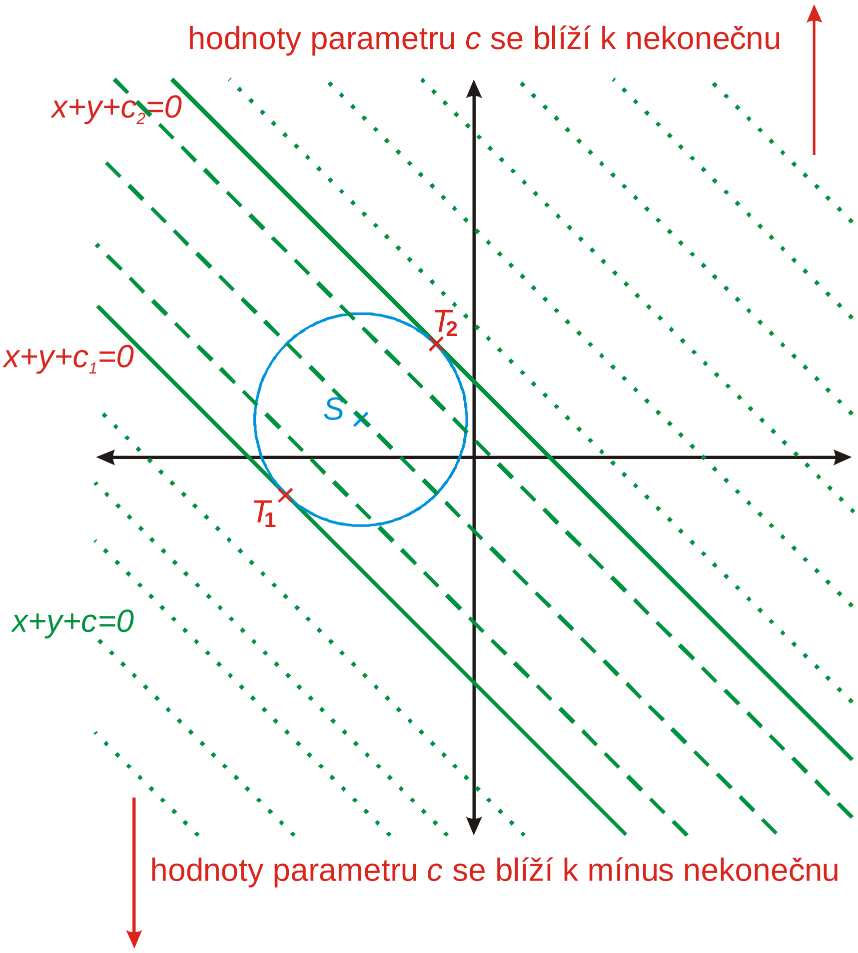
Dodatek: Že existují tři možné vzájemné polohy přímky a kružnice je zřejmé i z početního řešení. Po dosazení z rovnice přímky do rovnice kružnice získáme kvadratickou rovnici. Její řešení může skončit třemi různými způsoby:
2. kořeny $\Rightarrow$ sečna,
1. kořen $\Rightarrow$ tečna,
žádný kořen $\Rightarrow$ vnější přímka.

Př. 3: Už ze zadání předchozího příkladu je na první pohled zřejmé, že přímka $x+3y=0$ má s kružnicí $x^2+y^2-4x-2y=0$ nejméně jeden společný bod. Proč?

V obou rovnicích chybí absolutní člen (člen bez x a bez y) $\Rightarrow$ oběma rovnicím určitě vyhovuje bod $[0;0]$, který je jistým průsečíkem kružnice s přímkou.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu kružnice $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ a přímky $x+y+c=0$ v závislosti na hodnotě parametru c. Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.

Při změnách hodnoty parametru c se přímka pohybuje ve svislém směru, její směr se nemění.
Při nižších hodnotách parametru se přímka nachází níže, při vyšších výše.
Tečkované přímky jsou vnější přímky kružnice, čárkované jsou její sečny a plné tečny.



Z obrázku vidíme, že nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c):

- $c\in(-\infty;c_1)$ nebo $c\in(c_2;\infty)$ - přímka se s kružnicí neprotíná, je její vnější přímkou.
- $c=c_1$ nebo $c=c_2$ - přímka je tečnou kružnice.
- $c\in(c_1;c_2)$ - přímka protíná kružnici ve dvou bodech, je její sečnou.

Nyní řešíme příklad početně.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí $\Rightarrow$ body, které vyhovují oběma rovnicím $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic $\begin{aligned} x^2+y^2+6x-2y+2&=0 \\ x+y+c&=0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ stejný postup jako v příkladě 2, jen to bude trochu komplikovat parametr.

Vyjádříme z druhé rovnice: $x+y+c=0 \Rightarrow y=-x-c$ a dosadíme do první rovnice:

$$x^2+y^2+6x-2y+2=x^2+(-x-c)^2+6x-2(-x-c)+2=0$$

$$x^2+x^2+2xc+c^2+6x+2x+2c+2=0$$

$2x^2+2xc+8x+c^2+2c+2=0$ $\Rightarrow$ kvadratická rovnice s parametrem.

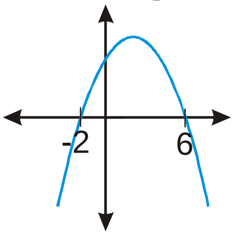
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2c+8)\pm\sqrt{(2c+8)^2-4\cdot 2\cdot(c^2+2c+2)}}{2\cdot 2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2c-8\pm\sqrt{4c^2+32c+64-8c^2-16c-16}}{4}=\frac{-2c-8\pm\sqrt{16c+48-4c^2}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2c-8\pm 2\sqrt{-(c^2-4c-12)}}{4}=\frac{-c-4\pm\sqrt{-(c^2-4c-12)}}{2}$$

O existenci kořenů rozhoduje znaménko výrazu pod odmocninou $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $-(c^2-4c-12)=-(c-6)(c+2)\geq 0$.

„obrácená“ parabola, průsečíky pro $c=6$ a $c=-2$.



Z obrázku je vidět, že mohou nastat tři možnosti:

1. $c\in(-2;6)$ $\Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D=-(c^2-4c-12)>0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou má dva kořeny $\Rightarrow$ kružnice se protíná s přímkou ve dvou bodech, přímka je její sečnou.

2. $c=-2$ nebo $c=6$ $\Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D=-(c^2-4c-12)=0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou má jeden kořen $\Rightarrow$ kružnice se protíná s přímkou v jednom bodě, přímka je její tečnou.

Tečné body můžeme spočítat:

- $c=6$ $x_{1,2}=\dfrac{-6-4\pm 0}{2}=-5$ $\Rightarrow$ $y=-x-c=-(-5)-6=-1$ $\Rightarrow$ $T_1[-5;-1]$
- $c=-2$ $x_{1,2}=\dfrac{-(-2)-4\pm 0}{2}=-1$ $\Rightarrow$ $y=-x-c=-(-1)-(-2)=3$ $\Rightarrow$ $T_2[-1;3]$

3. $c\in(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$ $\Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D=-(c^2-4c-12)<0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou nemá žádný kořen $\Rightarrow$ kružnice se s přímkou neprotíná, přímka je její vnější přímkou.

Pedagogická poznámka: Zadání příkladu bylo úmyslně zvoleno tak, aby nepřinášelo početní komplikace. Je nutné příklad kontrolovat v několika krocích (po rozboru, po výpočtu rovnice až k získání diskriminantu, po vyřešení kvadratické rovnice a závěr). Zejména dopočítávání tečným bodů (použití správné hodnoty parametru c) vyžaduje dobrou orientaci v příkladu.

Pedagogická poznámka: Není reálné očekávat, že by většina studentů byla schopna bez chyby dopočítat příklad (pokud nepočítali samostatně rovnice s parametrem, je to podle mě naprosto vyloučené). Kvůli průběžné kontrole je potřeba, aby studenti v lavicích provedli stejné dosazení jako je v učebnici $y=-x-c$, i když je samozřejmě jedno, jestli dosadí takto nebo obráceně $x=-y-c$.

Př. 5: Předchozí příklad je po provedení rozboru možné vyřešit i podstatně jednodušeji. Najdi tento způsob řešení.

Z obrázku vidíme, že nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c:

- $c\in(-\infty;c_1)$ nebo $c\in(c_2;\infty)$ - přímka se s kružnicí neprotíná, je její vnější přímkou.
- $c=c_1$ nebo $c=c_2$ - přímka je tečnou kružnice.
- $c\in(c_1;c_2)$ - přímka protíná kružnici ve dvou bodech, je její sečnou.

Stačí, pokud najdeme hodnoty c_1 a c_2 $\Rightarrow$ hledáme hodnoty parametru v obecné rovnici přímky, pro které je vzdálenost přímky od středu kružnice stejná jako poloměr kružnice.
Musíme najít středovou rovnici kružnice: $x^2+y^2+6x-2y+2=0$.

$x^2+y^2+6x-2y+2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+y^2-2y\cdot 1+1^2-1^2+2=$

$=(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+2=0$

$(x+3)^2+(y-1)^2=8 \ \Rightarrow\ S[-3;1],\ r=2\sqrt{2}$

Hledáme přímky ve tvaru $x+y+c=0$, které jsou od bodu $S[-3;1]$ vzdáleny $r=2\sqrt{2}$.

Dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky: $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|1(-3)+1\cdot 1+c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\dfrac{|-3+1+c|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \qquad /\cdot\sqrt{2}$

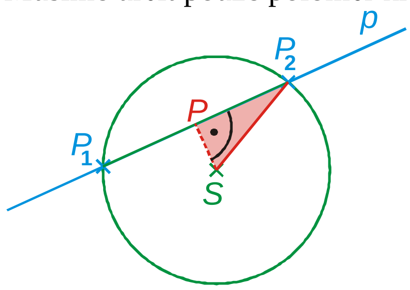
$|c-2|=4 \ \Rightarrow$ Hledáme čísla vzdálená od čísla 2 o 4 $\Rightarrow$ $c_1=6$, $c_2=-2$.
Dále už stejné jako v předchozím příkladu.

Př. 6: (BONUS a navíc trochu zavádějící) Obrázek v rozboru je nakreslen přesně podle skutečných souřadnic zadané kružnice a přímky. Z obrázku je vidět, že tečny kružnice je možné napsat ve směrnicovém tvaru jako $y=x+2$ a $y=x-6$. Hodnoty absolutních členů jsou pak opačné než ty, které vyšly v předchozím příkladu. Vysvětli rozpor.

Jde o primitivní chyták.
Přímka byla v předchozím příkladu zadána ve tvaru $x+y+c=0$.
Po úpravě do směrnicového tvaru získáme rovnici: $y=-x-c$, kde je znaménko absolutního členu samozřejmě opačné než v původní rovnici.

Př. 7: Najdi kružnici se středem v bodě $S[2;-1]$, která na přímce $p: x-2y+1=0$ vytkne tětivu o délce $4\sqrt{5}$.

Musíme určit pouze poloměr kružnice. Nakreslíme obrázek situace:



Kolmice na sečnu procházející středem kružnice rozdělí tětivu na dvě stejné poloviny. Získáme tak pravoúhlý trojúhelník SPP_2. Potřebujeme určit přeponu $|SP_2|$, která je zároveň poloměrem kružnice. Zbývající dvě strany známe:

- Velikost strany $|PP_2|$ je rovna polovině délky tětivy $\Rightarrow$ ze zadání $|PP_2| = 2\sqrt{5}$.
- Velikost strany $|SP|$ je rovna vzdálenosti přímky $p: x-2y+1=0$ od středu kružnice $S[2;-1] \Rightarrow |SP| = \frac{|1\cdot 2-2\cdot(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Vypočteme přeponu: $|SP_2|^2 = |PP_2|^2 + |SP|^2$.

$|SP_2| = \sqrt{|PP_2|^2+|SP|^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{25} = 5$

Podmínky zadání splňuje kružnice $k([2;-1];5)$ se středovou rovnicí $(x-2)^2+(y+1)^2 = 25$.

Př. 8: Urči vzájemnou polohu kružnic $k_1([-5;-3];5)$ a $k_2\left([1;-1];\sqrt{5}\right)$. Pokud mají kružnice nějaké průsečíky, urči jejich souřadnice.

Vzájemná poloha kružnic závisí na vzdálenosti jejich středů a jejich poloměrech.

$|S_1S_2| = \sqrt{(-5-1)^2+(-3-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \doteq 6{,}32$

$r_1 + r_2 = 5+\sqrt{5} \doteq 7{,}24 \Rightarrow$ Vzdálenost mezi středy je menší než součet poloměrů obou kružnic $\Rightarrow$ kružnice se musí protínat ve dvou bodech.

Průsečíky zjistíme jako body, které vyhovují rovnicím obou kružnic:

$$k_1: (x+5)^2+(y+3)^2 = 25$$
$$k_2: (x-1)^2+(y+1)^2 = 5$$

$$x^2+10x+25+y^2+6y+9 = 25$$
$$x^2-2x+1+y^2+2y+1 = 5$$

$$x^2+y^2+10x+6y = -9$$
$$x^2+y^2-2x+2y = 3$$

$$x^2+y^2+10x+6y = -9$$
$$[\![1]\!]-[\![2]\!] \qquad 12x+4y = -12 \quad /:4$$

$$x^2+y^2+10x+6y=-9$$
$$3x+y=-3 \Rightarrow y=-3x-3$$

$x^2+y^2+10x+6y=x^2+(-3x-3)^2+10x+6(-3x-3)=-9$

$x^2+9x^2+18x+9+10x-18x-18=-9$

$10x^2+10x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=-3-3x=-3-3\cdot 0=-3 \;\Rightarrow\; P_1[0;-3]$

$x_2=-1 \Rightarrow y_1=-3-3x_1=-3-3\cdot(-1)=0 \;\Rightarrow\; P_2[-1;0]$

Zadané kružnice se protínají ve dvou bodech $P_1[0;-3]$ a $P_2[-1;0]$.

Př. 9: Petáková:
strana 129/cvičení 82 b)
strana 129/cvičení 84 a)
strana 130/cvičení 85
strana 130/cvičení 86

Shrnutí: Průsečíky kružnic s jinými útvary se hledají stejně jako průsečíky přímek řešením soustav rovnic.