7.5.2 Hledání kružnic I

Předpoklady: 7501, kružnice z geometrie

Př. 1: Kružnice je dána obecnou rovnicí $x^2+y^2+2x+6y+2=0$. Najdi její střed a poloměr. Rozhodni, zda na kružnici leží bod $A[1;-1]$.

Obecnou rovnici musíme upravit na středovou.

$x^2+y^2+2x+6y+2=x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot 3+3^2-3^2+2=$

$(x+1)^2+(y+3)^2-8=0$

$(x+1)^2+(y+3)^2=8 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S[-1;-3]$ a poloměr $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Pokud bod $A[1;-1]$ leží na kružnici musí vyhovovat její rovnici $\Rightarrow$ dosadíme ho do ní.

$x^2+y^2+2x+6y+2=1^2+(-1)^2+2\cdot 1+6\cdot(-1)+2=0 \Rightarrow$ Bod $A[1;-1]$ leží na zadané kružnici.

Př. 2: Pro které hodnoty parametru *p* je rovnice $x^2+y^2+2x-6y+p=0$ obecnou rovnicí kružnice? Urči souřadnice jejího středu a její poloměr.

Rovnici se pokusíme převést na středový tvar, ze kterého můžeme činit závěry.

$x^2+y^2+2x-6y+p=x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2+y^2-2y\cdot 3+3^2-3^2+p=$

$(x+1)^2+(y-3)^2+p-10=0$

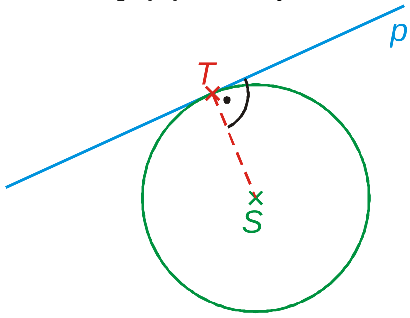
$(x+1)^2+(y-3)^2=10-p$

Pravá strana středové rovnice kružnice má význam druhé mocniny poloměru $\Rightarrow$ musí být kladná $\Rightarrow$ $10-p>0 \Rightarrow p<10$. Pro tyto hodnoty parametru *p* je zadaná rovnice, obecnou rovnicí kružnice se středem v bodě $S[-1;3]$ a poloměrem $r=\sqrt{10-p}$.

Ve zbytku hodiny budeme hledat kružnice (jejich středy a poloměry), tak aby splňovaly zadané podmínky $\Rightarrow$ musíme si zopakovat pravidla, která pro kružnice platí.

- Kružnice je množina bodů stejně vzdálených od jejího středu (této vzdálenosti říkáme poloměr) $\Rightarrow$ pokud kružnice prochází dvěma body, její střed leží na ose úsečky určené těmito body.
- Střed kružnice opsané trojúhelníku (kružnice procházející třemi body) leží na průsečíku os libovolných dvou stran.
- Množina všech bodů, ze kterých je úsečka vidět pod úhlem $90°$, je kružnice, jejíž průměr je daná úsečka (bez krajních bodů úsečky) - Thaletova kružnice.

- Úsečka spojující tečný bod se středem kružnice je kolmá na svou tuto tečnu.



- Střed kružnice, která se dotýká dvou různoběžek, leží na ose jejich úhlu.

Pedagogická poznámka: Následující příklady opět doporučuji řešit tak, že nejdříve necháte studentům pět, deset minut na rozmyšlenou, projdete si řešení jednotlivých příkladů, a pak je necháte počítat. Ti nejlepší nemusí na společné povídání čekat a mohou počítat rovnou.

Př. 3: Napiš středovou rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-1;3]$ a prochází bodem $A[1;1]$.

Na sestavení rovnice potřebujeme střed a poloměr $\Rightarrow$ musíme zjistit poloměr, který je roven vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu $\Rightarrow$

$r = |SA| = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Hledaná kružnice má poloměr $r = 2\sqrt{2}$ a středovou rovnici $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

Pedagogická poznámka: Studenti často využívají středovou rovnici kružnice, do které dosadí bod $A[1;1]$ a určí tak poloměr.

Př. 4: Najdi středový tvar rovnice kružnice *k*, jestliže úsečka *AB*, $A[-2;3]$, $B[4;1]$ je jedním z jejích průměrů. Zjisti, zda na kružnici leží bod $C[2;5]$. Najdi všechny body, které leží na kružnici a jejichž *x*-ová souřadnice je rovna 0. Ještě před vyřešením posledního části příkladu rozhodni, kolik takových bodů může být.

Musíme určit střed a poloměr kružnice.
Střed kružnice = střed úsečky *AB*: $S = S_{AB} \Rightarrow S[1;2]$.
Poloměr kružnice = vzdálenost středu úsečky od jednoho z krajních bodů

$\Rightarrow r = |AS| = \sqrt{(1-[-2])^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$.

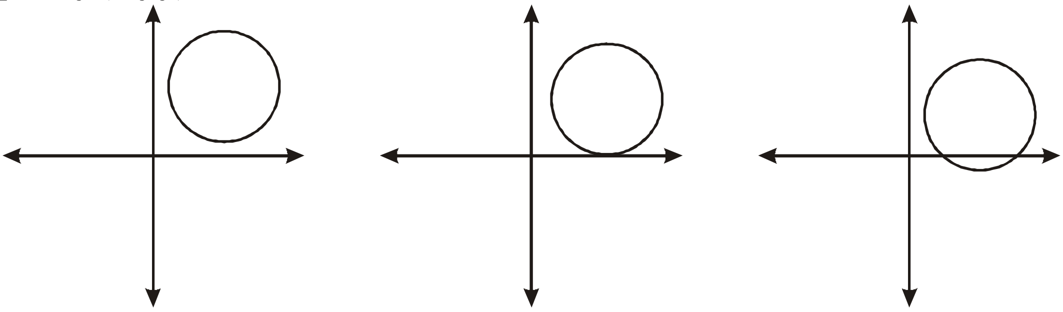
Středová rovnice: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Bod $C[2;5]$ leží na kružnici *k*, pokud vyhovuje její rovnici $\Rightarrow$ dosadíme ho do odovozené rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

$(2-1)^2 + (3-2)^2 = 10$

$1^2+3^2=10 \Rightarrow$ Bod $C[2;5]$ leží na kružnici *k*.

Hledáme body s nulovou *x*-ovou souřadnicí ležící na kružnici $k \Rightarrow$ vlastně hledáme průsečíky přímky (osy *y*) s kružnicí $k \Rightarrow$ 0, 1 nebo 2 řešení.



Tento konkrétní příklad: osa *y* se protíná s přímkou $AB \Rightarrow$ prochází vnitřkem kružnice $\Rightarrow$ měli bychom najít dvě řešení.

Dosadíme body $X[0;y]$ do rovnice $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

$(0-1)^2+(y-2)^2=10 \Rightarrow$ kvadratická rovnice $\Rightarrow$ 0, 1 nebo 2 řešení.

$1+y^2-4y+4=10$

$y^2-4y-5=0$

$(y-5)(y+1)=0 \Rightarrow$

$y_1=5 \Rightarrow$ bod $X_1[0;5]$

$y_2=-1 \Rightarrow$ bod $X_2[0;-1]$

Na kružnici leží dva body s nulovou *x*-ovou souřadnicí.

Př. 5: Najdi kružnici, která prochází body $A[-2;2]$, $B[4;0]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x-y+2=0$.

Hledáme střed kružnice (poloměr snadno dopočítáme po jeho nalezení) $\Rightarrow$ potřebujeme určit dvě souřadnice $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.

1. rovnice: Střed leží na přímce $p \Rightarrow$ musí vyhovovat její rovnici.

2. rovnice: Kružnice prochází body $A[-2;2]$, $B[4;0] \Rightarrow$ její střed je od obou stejně daleko $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose úsečky *AB*.

Střed úsečky *AB*: $S_{AB}\left[\frac{-2+4}{2};\frac{2+0}{2}\right] \Rightarrow S_{AB}[1;1]$.

Směrový vektor úsečky *AB* je normálový vektor osy: $\boldsymbol{u}_{AB}=B-A=(6;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(3;-1)$.

Rovnice osy: $3x-y+c=0$.

Osa prochází bodem $S_{AB}[1;1] \Rightarrow 3\cdot 1-1+c=0 \Rightarrow c=-2$.

Rovnice osy: $3x-y-2=0$.

Řešíme soustavu:
$$\begin{aligned} x-y+2=0 &\Rightarrow y=x+2 \\ 3x-y-2=0 &\Rightarrow y=3x-2 \end{aligned}$$

Srovnávací metoda: $x+2=3x-2$.

$2x=4$

$x=2 \Rightarrow y=x+2=2+2=4$

Hledaná kružnice má střed v bodě $S[2;4]$.

Poloměr: $r=|SA|=\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=\sqrt{(2-[-2])^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice je $(x-2)^2+(y-4)^2=20$.

Poznámka: Příklad je samozřejmě možné řešit tak, že kromě rovnice přímky použijeme jako druhou rovnici podmínku stejné vzdálenosti bodů *A*, *B* od středu *S*: $|SA|=|SB|$, po dosazení:
$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$.

Př. 6: Najdi kružnici, která prochází body $A[0;0]$, $B[1;3]$, $C[4;2]$. Urči její střed a poloměr.

Dva možné postupy řešení:

1. napodobení geometrické konstrukce

Hledáme průsečík osy úsečky *AB* a osy úsečky *AC* (jde o nalezení kružnice opsané trojúhelníku).

$S_{AB}\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, $\boldsymbol{u}_{AB}=(1;3)\Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(1;3)$

Rovnice osy: $x+3y+c=0$, prochází bodem $S_{AB}\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ $\Rightarrow \frac{1}{2}+3\frac{3}{2}+c=0\Rightarrow c=-5$.

Osa úsečky *AB*: $x+3y-5=0$.

$S_{AC}[2;1]$, $\boldsymbol{u}_{AC}=(4;2)\Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(2;1)$

Rovnice osy: $2x+y+c=0$, prochází bodem $S_{AC}[2;1]$ $\Rightarrow 2\cdot 2+1+c=0\Rightarrow c=-5$.

Osa úsečky *AC*: $2x+y-5=0$.

Řešíme soustavu:
$$\begin{aligned}&x+3y-5=0\\&2x+y-5=0\Rightarrow y=5-2x\end{aligned}$$

Dosadíme do první rovnice: $x+3(5-2x)-5=0$.

$x+15-6x-5=0$
$5x=10$
$x=2 \Rightarrow y=5-2x=5-2\cdot 2=1$.

Kružnice má střed v bodě $S[2;1]$.

Poloměr: $r=|SA|=\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

2. Dosazení do obecné rovnice kružnice

Rovnici je možné napsat v obecném tvaru: $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$. Rovnice obsahuje tři neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme tři rovnice. Každý ze tří bodů musí rovnici vyhovovat $\Rightarrow$ postupně dosazujeme:

$A[0;0]$: $0^2+0^2-2m\cdot 0-2n\cdot 0+p=0\Rightarrow p=0$ ($p=0$ budeme ihned dosazovat i do dalších rovnic)

$B[1;3]$: $1^2+3^2-2m\cdot 1-2n\cdot 3+0=0\Rightarrow 2m+6n=10$

$C[4;2]$: $4^2+2^2-2m\cdot 4-2n\cdot 2+0=0 \Rightarrow 8m+4n=20$

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu: $\begin{matrix} m+3n=5 \\ 2m+n=5 \Rightarrow n=5-2m \end{matrix}$ (stejná soustava jako u předchozího postupu).

Dosadíme do první rovnice: $m+3(5-2n)=5$.

$m+15-6m=5$
$m=2$
$n=5-2m=5-2\cdot 2=1$

Kružnice má obecnou rovnici: $x^2+y^2-2\cdot 2x-2\cdot 1y+0=0$.

Upravíme na středový tvar:

$x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2+y^2-2\cdot 1y+1^2-1^2+0=(x-2)^2+(y-1)^2-5=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S[2;1]$ a poloměr $r=\sqrt{5}$.

Dodatek: Oba způsoby jsou důležité, opět ilustrují dva základní přístupy v analytické geometrii

Př. 7: Rozhodni a zdůvodni, kdy je který z obou postupu na řešení předchozího příkladu výhodnější.

Druhý postup je jednodušší, když nezískáme složitou soustavu rovnic $\Rightarrow$ v případě, že velká část souřadnic je nulová.

Př. 8: Petáková:
strana 124/cvičení 5 a) d)
strana 124/cvičení 7 a)

Shrnutí: Kdo hledá, najde. I kružnice.