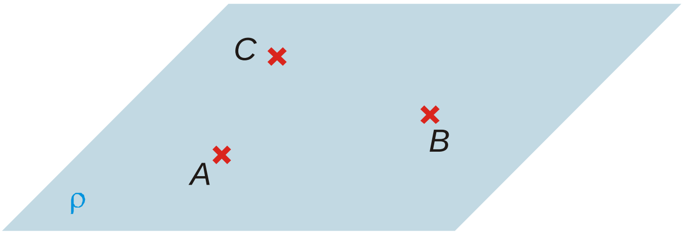
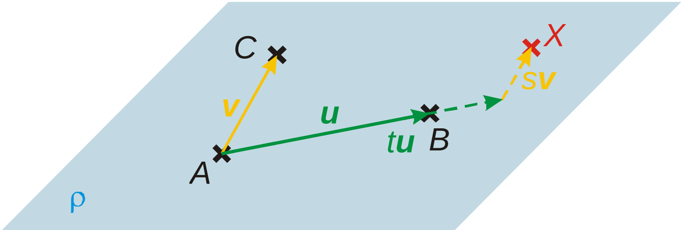
7.4.3 Parametrické vyjádření roviny

Předpoklady: 7402

Jak je dána rovina?
Například třemi body.



Jak pomocí těchto tří bodů vyjádříme všechny další body roviny ρ?
Podobně jako body na přímce: Postavíme se do bodu *A* a posuneme se o násobek vektoru $\boldsymbol{u} = (B - A)$ a o násobek vektoru $\boldsymbol{v} = (C - A)$.



Můžeme tedy psát: $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$

Podobné jako rovnice přímky, ale máme dva vektory. Jasné – přímka má pouze jeden rozměr, můžeme se na ní pohybovat pouze v jednom směru (proto jeden vektor), rovina má dva rozměry $\Rightarrow$ potřebujeme dva směry, dva vektory, které nejsou navzájem svými násobky.

Každý bod *X* roviny *ABC* můžeme psát ve tvaru:
$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$,
kde $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - A$.
Každý bod *X* zapsaný v uvedeném tvaru je bodem roviny *ABC*.
Rovnice $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$ se nazývá **parametrická rovnice roviny** (nebo také **parametrické vyjádření roviny**) *ABC*.

Př. 1: Rozepiš parametrické vyjádření roviny dané bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ do rovnic pro jednotlivé souřadnice bodů $X[x; y; z]$.

Přepisem rovnice $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$ do souřadnic získáme tři rovnice:

$$x = a_1 + tu_1 + sv_1$$
$$y = a_2 + tu_2 + sv_2, \quad t, s \in R.$$
$$z = a_3 + tu_3 + sv_3$$

Př. 2: Najdi parametrické vyjádření roviny *ABC* $A[1;2;3]$, $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$. Výpočtem zjisti, zda v rovině leží body $D[3;2;1]$ a $E[-3;4;-1]$.

Určíme dva směrové vektory: $\boldsymbol{u} = B - A = (2;-2;-1)$ $\boldsymbol{v} = C - A = (-2;0;-5)$

Parametrické vyjádření roviny: $\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s, t \in R, s \in R \end{aligned}$.

Pokud **bod *D*** leží v rovině *ABC* musí vyhovovat rovnicím.

Dosadíme jeho souřadnice: $\begin{aligned} 3 &= 1 + 2t - 2s \\ 2 &= 2 - 2t \\ 1 &= 3 - t - 5s \end{aligned}$

Tři rovnice o dvou neznámých. Z druhé rovnice vypočítáme *t*: $2 = 2 - 2t \Rightarrow t = 0$.
Dosadíme do zbývajících rovnic:

$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2 \cdot 0 - 2s \Rightarrow s = -1 \\ 1 &= 3 - 0 - 5s \Rightarrow s = \frac{2}{5} \end{aligned}$ $\Rightarrow$ bod *D* v rovině *ABC* neleží.

Pokud **bod *E*** leží v rovině *ABC* musí vyhovovat rovnicím.

Dosadíme jeho souřadnice: $\begin{aligned} -3 &= 1 + 2t - 2s \\ 4 &= 2 - 2t \\ -1 &= 3 - t - 5s \end{aligned}$.

Tři rovnice o dvou neznámých.
Z druhé rovnice vypočítáme *t*: $4 = 2 - 2t \Rightarrow t = -1$. Dosadíme do zbývajících:

$\begin{aligned} -3 &= 1 + 2 \cdot (-1) - 2s \Rightarrow s = 1 \\ -1 &= 3 - (-1) - 5s \Rightarrow s = 1 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ bod *E* v rovině *ABC* leží.

Pedagogická poznámka: Opět se objeví diskuse o řešení vzniklé soustavy. Někteří studenti opět dosadí za *t* pouze do jedné ze zbývajících dvou rovnic a zjistí tak i u bodu *D*, že leží v rovině *ABC*.

Př. 3: Jsou dány body $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$, $E[-3;4;-1]$ z předchozího příkladu (všechny leží v rovině *ABC*). Najdi parametrické vyjádření přímky *BC*. Poté vyjádři rovinu *ABC* pomocí vyjádření přímky *BC* a bodu *E* (rovinu je možné zadat i přímkou a bodem). Srovnej výsledek tohoto příkladu s parametrickým vyjádřením roviny *ABC* z předchozího příkladu.

Přímka *BC*:

Směrový vektor: $\boldsymbol{u} = C - B = (-4;2;-4)$.

Přímka *BC*: $X = B + t\boldsymbol{u} = [3;0;2] + t(-4;2;-4)$.

Soustava rovnic: $\begin{aligned} x &= 3 - 4t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - 4t \end{aligned}$.

Rovina *ABC*:

k vyjádření roviny potřebujeme dva vektory a bod. Bod a jeden vektor už máme z vyjádření přímky *BC*, druhý vektor musíme získat z bodu, který je v rovině, ale na přímce *BC* neleží $\Rightarrow$ použijeme bod *E*: $\boldsymbol{v} = E - B = (-6;4;-3)$

Vyjádření roviny: $\begin{aligned} x &= 3 - 4t - 6s \\ y &= 2t + 4s \\ z &= 2 - 4t - 3s, t \in R, s \in R \end{aligned}$

Srovnáme vyjádření roviny *ABC* z tohoto a předchozího příkladu:

nyní $\begin{aligned} x &= 3 - 4t - 6s \\ y &= 2t + 4s \\ z &= 2 - 4t - 3s, t \in R, s \in R \end{aligned}$ minule $\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s, t \in R, s \in R \end{aligned}$

$\Rightarrow$ obě vyjádření si nejsou vůbec podobná (ani směrové vektory nejsou svými násobky)

$\Rightarrow$

- Zjišťovat z parametrického vyjádření roviny totožnost nebo rovnoběžnost nebude žádný med.
- Ověřit zda bod leží v rovině je poměrně obtížné.

$\Rightarrow$ Zkusíme najít jiný způsob vyjádření roviny (zřejmě půjde o rovnici podobnou rovnici $z = 0$, která je rovnicí roviny *xy*).

Ve zbytku hodiny si ještě započítáme (jde fakticky o nácvik řešení soustav rovnic).

Př. 4: Najdi průsečnici roviny $ABC = \{[1+2t-2s; 2-2t; 3-t-5s], t \in R, s \in R\}$ se souřadnou rovinou *xz*.

Rovnice souřadné roviny *xz*: všechny body v této rovině mají *y*-ovou souřadnici nulovou $\Rightarrow$ $y = 0$.

$\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s \\ y &= 0 \end{aligned}$.

Dosadíme z poslední rovnice do druhé: $0 = 2 - 2t \Rightarrow t = 1$.

Získanou hodnotu dosadíme do zbývajících rovnic: $\begin{aligned} x &= 1 + 2 \cdot 1 - 2s = 3 - 2s \\ z &= 3 - 1 - 5s = 2 - 5s \end{aligned}$.

Soustavě rovnic vyhovuje nekonečně mnoho bodů, které vyhovují sadě rovnic:

$\begin{aligned} x &= 3 - 2s \\ y &= 0 \\ z &= 2 - 5s, s \in R \end{aligned}$ $\Rightarrow$ získali jsme parametrické vyjádření přímky (logické, očekávali jsme to).

Průseční rovin *ABC* a *xz* je přímka $p = \{[3-2s; 0; 2-5s], s \in R\}$.

Př. 5: Najdi průsečík roviny $ABC = \{[1+2t-2s; 2-2t; 3-t-5s], t \in R, s \in R\}$ s přímkou $p = \{[-1+2t; -4+t; -2-t], t \in R\}$.

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ musí splňovat všechny rovnice $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic.

POZOR: vyjádření přímky p obsahuje stejně pojmenovaný parametr jako vyjádření roviny $\Rightarrow$ jedno z písmen musíme změnit.

Soustava rovnic:
$$\begin{aligned} 1+2t-2s &= -1+2r \\ 2-2t &= -4+r \\ 3-t-5s &= -2-r \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme r a dosadíme do ostatních: $r=6-2t$.

$$1+2t-2s=-1+2(6-2t)$$
$$3-t-5s=-2-(6-2t)$$

$$1+2t-2s=-1+12-4t$$
$$3-t-5s=-2-6+2t$$

$$6t-2s=10 \quad /:2$$
$$3t+5s=11$$

$$3t-s=5$$
$$3t+5s=11$$

Rovnice odečteme: $-6s=-6 \ \Rightarrow\ s=1$.

Dopočteme t: $3t-s=3t-1=5 \ \Rightarrow\ t=2$.
Dopočteme r: $r=6-2t=6-2\cdot 2=2$.
Dopočteme souřadnice průsečíku:
$x=-1+2r=-1+2\cdot 2=3$
$y=-4+r=-4+2=-2$
$z=-2-r=-2-2=-4$
Přímka p se s rovinou ABC protíná v bodě $P[3;-2;-4]$.

Př. 6: Petáková:
strana 115/cvičení 16 a) d)
strana 115/cvičení 17 a)

Shrnutí: Parametrické vyjádření roviny je analogií parametrického vyjádření přímky. Jeho používá je však značně nemotorné.