7.3.13 Vzdálenost bodu od přímky II

Př. 1: Najdi přímku, která je rovnoběžná s přímkou $x-3y+2=0$ a je od ní vzdálena $\sqrt{10}$.

Bod na ose *y*: $A\left[0;a_y\right]$. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost:

$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 0-3\cdot a_y+2|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\sqrt{10}$ $\qquad \frac{|-3a_y+2|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ $\qquad |-3a_y+2|=|3a_y-2|$

$|3a_y-2|=10$ rovnice s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ dělíme na intervaly $3a_y-2=0\Rightarrow a_y=\frac{2}{3}$

$a_y\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right\rangle$ $\quad -3a_y+2=10$	$a_y\in\left\langle\frac{2}{3};\infty\right)$ $\quad 3a_y-2=10$
$a_y=-\frac{8}{3}$	$a_y=4$
$A_1[0;4]$ $x-3y+12=0$	$A_2\left[0;-\frac{8}{3}\right]$ $\quad x-3y-8=0$

Př. 2: Na přímce $x+3y-1=0$ najdi bod, který je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$.

Souřadnice bodu $A\left[a_x;a_y\right]$

Bod *A* je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$: $d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot a_x+a_y-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

Bod *A* leží na přímce $x+3y-1=0$ $\quad a_x+3\cdot a_y-1=0 \Rightarrow a_x=1-3a_y$ dosadíme:

$\frac{|2\cdot(1-3a_y)+a_y-7|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \quad /\cdot\sqrt{5}$ $\qquad |2-6a_y+a_y-7|=10$ $\qquad |-5a_y-5|=10$

$|-5||a_y+1|=10$ $\qquad |a_y-(-1)|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od -1 o dva

$a_{y1}=1 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot 1=-2 \Rightarrow A_1[-2;1]$

$a_{y2}=-3 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot(-3)=10 \Rightarrow A_2[10;-3]$

Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$. Najdi přímku, která je s nimi rovnoběžná a má od obou stejnou vzdálenost.

Analytické řešení:
Hledaná přímka je rovnoběžná s přímkou $2x-4y-5=0 \Rightarrow$ je popsána rovnicí $2x-4y+c=0$. Koeficient *c* určíme pomocí libovolného bodu na této přímce. Zvolíme si například bod s nulovou *x*-ovou souřadnicí: $2\cdot 0-4y+c=0 \Rightarrow y=\frac{c}{4}$.

Vzdálenost bodu $\left[0;\frac{c}{4}\right]$ je stejně vzdálen od přímek $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

$$\frac{\left|0-2\cdot\frac{c}{4}+6\right|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{\left|2\cdot 0-4\cdot\frac{c}{4}-5\right|}{\sqrt{2+(-4)^2}} \Rightarrow \frac{\left|-\frac{c}{2}+6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|-c-5|}{\sqrt{20}} \quad /\cdot 2\sqrt{5}$$

$2|-1|\left|\frac{c}{2}-6\right| = |-1||c+5|$ $\quad |c-12| = |c+5| \Rightarrow$ řešíme po intervalech:

- $c \in (-\infty;-5\rangle \Rightarrow -c+12 = -c-5 \Rightarrow 17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$
- $c \in \langle -5;12 \rangle \Rightarrow -c+12 = c+5 \Rightarrow 2c = \frac{7}{2} \Rightarrow c = \frac{7}{2}$
- $c \in \langle 12;\infty) \Rightarrow c-12 = c+5 \Rightarrow -17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$

Hledanou přímkou je přímka $2x-4y+\frac{7}{2}=0$.

Konstrukční řešení:
rovnoběžku, která je osou pásu můžeme vést středem libovolné úsečky, která má krajní body na přímkách $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

- průsečík přímky $x-2y+6=0$ s osou *y*: $0-2y+6=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ bod $A[0;3]$
- průsečík přímky $2x-4y-5=0$ s osou *y*: $2\cdot 0-4y-5=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{4} \Rightarrow B\left[0;-\frac{5}{4}\right]$

$3+\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow$ střed úsečky *AB*: $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$

Rovnice rovnoběžky: $2x-4y+c=0$, dosadíme bod $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$: $2\cdot 0-4\cdot\frac{7}{8}+c=0 \Rightarrow c=\frac{7}{2}$

Př. 4: Najdi všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x+2y-3=0$ a $q: 2x-y-1=0$.

od přímky $p: x+2y-3=0$: $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=0$. přímky $q: 2x-y-1=0$: $\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=0$.

$|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$ musíme odstranit absolutní hodnoty. Dvě možnosti:

- oba výrazy záporné: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow -(x+2y-3) = -(2x-y-1)$
  $x-3y+2=0$
- oba výrazy kladné: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow x+2y-3 = 2x-y-1$
  $x-3y+2=0$ - stejná přímka jako v předchozím případě
- levý výraz kladný, pravý záporný: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$
  $x+2y-3 = -(2x-y-1)$
  $3x+y-4=0$
- levý výraz záporný, pravý kladný: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$
  $-(x+2y-3) = 2x-y-1$
  $3x+y-4=0$

dvojice přímek $x-3y+2=0$ a $3x+y-4=0$.

Př. 5: Petáková:
strana 109/cvičení 65
strana 109/cvičení 66
strana 109/cvičení 68
strana 109/cvičení 74