

7.3.12 Vzdálenost bodu od přímky I

Předpoklady: 7308

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času, můžete odvodit vzorec bez samostatné práce studentů a použít některý z příkladů z další hodiny. Tím jednu ze dvou hodin pro vzdálenost bodu od přímky ušetříte.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti řeší první příklad samostatně, je třeba s nimi probrat, které kroky bude při výpočtu nutno provést a donutit je, aby si ony body napsali do sešitu. Při odstraňování chyb se pak často bavíme o tom, který krok zrovna prováděli.

Př. 1: Urči vzdálenost bodu P od přímky p . Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[-4;2]$ a přímku $p: 3x - 4y - 5 = 0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1; p_2]$ a přímku $p: ax + by + c = 0$. Přímku kolmou na přímku p vyjádři parametricky.

Postup při výpočtu:

1. Najdeme přímku q , která prochází bodem P a je kolmá na přímku p
2. Najdeme průsečík Q přímek p a q
3. Vzdálenost $d = |PQ|$ je vzdáleností bodu P od přímky p

Určení přímky q :

normálový vektor přímky p $n_p = (3; -4)$ je směrovým vektorem kolmice $q \Rightarrow$

$$q: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

Průsečík Q přímek p a q :

$$p: 3x - 4y - 5 = 0$$

$$q: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

$$3(-4 + 3t) - 4(2 - 4t) - 5 = 0$$

$$25t - 25 = 0$$

$$t = 1$$

Dosadíme do rovnice přímky q :

$$x = -4 + 3t = -4 + 3 \cdot 1 = -1$$

$$y = 2 - 4t = 2 - 4 \cdot 1 = -2$$

Průsečíkem je bod $Q[-1; -2]$.

Vzdálenost bodů P a Q

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \\ &= \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (-2 - 2)^2} = 5 \end{aligned}$$

Určení přímky q :

normálový vektor přímky p $n_p = (a; b)$ je směrovým vektorem kolmice $q \Rightarrow$

$$q: \begin{cases} x = p_1 + at \\ y = p_2 + bt \end{cases}$$

Průsečík Q přímek p a q :

$$p: ax + by + c = 0$$

$$q: \begin{cases} x = p_1 + at \\ y = p_2 + bt \end{cases}$$

$$a(p_1 + at) + b(p_2 + bt) + c = 0$$

$$ap_1 + a^2t + bp_2 + b^2t + c = 0$$

$$a^2t + b^2t = -(ap_1 + bp_2 + c)$$

$$t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2}$$

Výraz pro t je příliš složitý, bod Q budeme zapisovat bez toho, abychom jej dosadili.

Průsečíkem je bod $Q[p_1 + at; p_2 + bt]$.

Vzdálenost bodů P a Q

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \\ &= \sqrt{([p_1 + at] - p_1)^2 + ([p_2 + bt] - p_2)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = \sqrt{t^2} \sqrt{a^2 + b^2} = |t| \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme parametr } t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} |PQ| &= |t| \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= \left| -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Získali jsme poměrně jednoduchý vzorec, který umožňuje spočítat vzdálenost bodu od přímky.

Vzdálenost bodu $P[p_1; p_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ je dána vzorcem

$$d = |Pp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Z jakých částí se vzorec skládá:

- $|ap_1 + bp_2 + c|$ = dosazení bodu do rovnice přímky, pro bod na přímce vyjde nula, zřejmě větší absolutní hodnota výrazu znamená větší vzdálenost od přímky, hodnota však závisí na použitém normálovém vektoru
- $\sqrt{a^2 + b^2}$ = velikost normálového vektoru (větší normálový vektor znamená větší hodnotu výrazu v čitateli) \Rightarrow hodnotu čitatele musíme vydělit velikostí vektoru

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[-4;2]$ od přímky $p: 3x - 4y - 5 = 0$ pomocí odvozeného vzorce.

$$p: 3x - 4y - 5 = 0 \quad P[-4;2]$$

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$$

Př. 3: V trojúhelníku ABC : $A[2;-1]$, $B[1;4]$, $C[-3;-3]$ urči:

a) výšku v_c

b) výšku v_b .

a) Výšku v_c určíme jako vzdálenost bodu C od přímky AB .

Určíme obecnou rovnici přímky AB : $\mathbf{s}_{AB} = (-1;5) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB} = (5;1)$

$$5x + y + c = 0$$

Dosadíme bod $A[2;-1]$: $5 \cdot 2 + (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$

přímka AB : $5x + y - 9 = 0$

$$v_c = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{26}} = \frac{27}{\sqrt{26}}.$$

b) Výšku v_b určíme jako vzdálenost bodu B od přímky AC .

Určíme obecnou rovnici přímky AC : $s_{AC} = (-5; -2) \Rightarrow n_{AC} = (2; -5)$

$$2x - 5y + c = 0$$

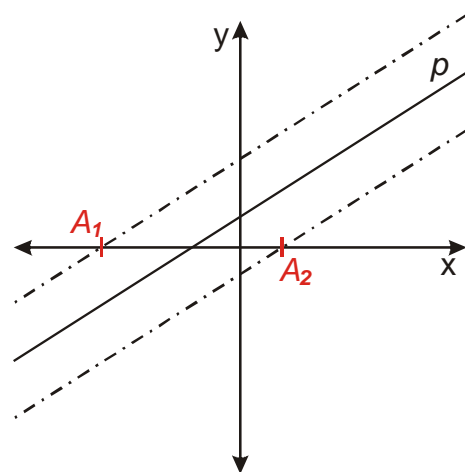
Dosadíme bod $A[2; -1]$: $2 \cdot 2 - 5(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$

přímka AC : $2x - 5y - 9 = 0$

$$v_b = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{29}} = \frac{27}{\sqrt{29}}.$$

Pedagogická poznámka: S výškou v_c je třeba studentům pomoci, ale výšku v_b by měli vypočítat sami.

Př. 4: Na ose x najdi bod A , který má od přímky p : $x - 2y + 2 = 0$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Než začneš příklad řešit analyticky, odhadni pomocí náčrtku počet řešení.



Z obrázku je zřejmé, že příklad by měl mít dvě řešení (oba body budou stejně vzdálené od průsečíku přímky p s osou x).

Souřadnice hledaného bodu: $A[a_x; 0]$ (leží na ose x)

Určíme jediné číslo \Rightarrow stačí jediná rovnice, na jeho určení \Rightarrow dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|1 \cdot a_x - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|a_x + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$|a_x + 2| = 5 \Rightarrow$ na číselné ose hledáme čísla vzdálená od čísla -2 o 5

$$a_{x_1} = 3$$

$$a_{x_2} = -7$$

Na ose x splňují zadání dva body: $A_1 [3;0]$ a $A_2 [-7;0]$.

Pedagogická poznámka: Obrázek je důležitý. Studenti mají často tendenci absolutní hodnotu jednoduše vypustit a tak ztratí jedno řešení. S obrázek je větší šance, že začnou řešit, kam se jim druhé řešení ztratilo. Jde také o to, aby se u studentů podporovala snaha mít dopředu představu o tom, jak počítaný příklad vyjde.

Studenti, kteří značili souřadnice hledaného bodu $A[a_1; a_2]$ mají občas tendenci zaměnit označení dvou řešení za označení dvou souřadnic. Získají tak řešení $A[3;7]$, které je samozřejmě špatné.

Př. 5: Petáková:

strana 109/cvičení 63

strana 109/cvičení 66

strana 109/cvičení 68

Shrnutí: Pomocí obecné rovnice přímky můžeme spočítat jakou má od ní vzdálenost libovolný bod roviny.