7.3.11 Polohové úlohy v rovině

Př. 1: Zkus přehledně uspořádat dosud probrané poznatky z analytické geometrie. Jak spolu a se způsoby zadání přímky souvisí parametrické vyjádření přímky, její obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar? Se kterým z uvedených způsobů vyjádření přímky, souvisí nerovnice pro polorovinu?

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímek $p: 2x-3y+1=0$ a $q=\{[1-6t;-2-4t], t\in R\}$.

$p: 2x-3y+1=0$ a q: $\begin{array}{l} x=1-6t \\ y=-2-4t, t\in R \end{array}$ $\Rightarrow$ dosadíme z vyjádření *q* do rovnice pro *p*:

$2(1-6t)-3(-2-4t)+1=0$

$2-12t+6+12t+1=0$

$9=0$ $\Rightarrow$ přímky *p* a *q* nemají společný bod $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné

Př. 3: Najdi obecnou rovnici osy úsečky *AB*; $A[-2;1]$, $B[4;-3]$.

osa úsečky *AB* je přímka kolmá na úsečku *AB* procházející jejím středem $\Rightarrow$
$\boldsymbol{u}_{AB}=B-A=(6;-4)$ je směrový vektor přímky *AB* a tedy jeden z normálových vektorů hledané osy $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_{osy}=(3;-2)$ (vektor zkrátíme) $\Rightarrow$ obecná rovnice osy: $3x-2y+c=0$
bod na ose $S_{AB}[1;-1]$ $\Rightarrow$ $3\cdot 1-2(-1)+c=0$ $\Rightarrow$ $c=-5$ $\quad$ $3x-2y-5=0$

Př. 4: Které z následujících přímek jsou totožné?:

a) $4x-2y+2=0$ $\quad$ b) $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=1+2t, t\in R \end{array}$ $\quad$ c) $\{[1-t;1-2t], t\in R\}$

d) $y=2x+1$ $\quad$ e) $-2x+y+1=0$ $\quad$ f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

a) $4x-2y+2=0$ $\Rightarrow$ $2x-y+1=0$

b) $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=1+2t, t\in R \end{array}$ $\Rightarrow$ $2x-y+3=0$

c) $\{[1-t;1-2t], t\in R\}$ $\Rightarrow$ $2x-y-1=0$

d) $y=2x+1$ $\Rightarrow$ $2x-y+1=0$

e) $-2x+y+1=0$ $\Rightarrow$ $2x-y-1=0$

f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ $\Rightarrow$ $2x+y=4$ $\Rightarrow$ $2x+y-4=0$

$\Rightarrow$ Přímky a) až e) jsou rovnoběžné. Totožné jsou pak dvě dvojice přímek: přímky a), d) a přímky c), e).

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-1;-2]$, $B[3;-4]$, $C[5;5]$. Najdi patu výšky v_c. Najdi vyjádření výšky v_c (je myšlena přímo úsečka, ne přímka na které v_c leží).

přímka *AB*: $B-A=(4;-2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}_{AB}=(2;-1)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_{AB}=(1;2)$ $\Rightarrow$ rovnice $x+2y+c=0$
dosadíme bod *A*: $-1+2(-2)+c=0$ $\Rightarrow$ $c=5$ $\quad$ $x+2y+5=0$

přímka na které leží v_c **:** je kolmá na přímku $AB \Rightarrow \boldsymbol{u}_{v_c} = \boldsymbol{n}_{AB} = (1;2)$. bod $C[5;5]$

přímka, na které leží v_c : $\begin{matrix} x = 5+t \\ y = 5+2t, t \in R \end{matrix}$

pata výšky v_c **:** $x+2y+5=0$ a $\begin{matrix} x = 5+t \\ y = 5+2t, t \in R \end{matrix}$

$(5+t)+2(5+2t)+5=0 \qquad 5+t+10+4t+5=0 \quad 5t=-20 \qquad t=-4$

$C_0 : \begin{matrix} x = 5+t = 5+(-4) = 1 \\ y = 5+2t = 5+2(-4) = -3 \end{matrix}$ bod $C_0[1;-3]$. **vyjádření výšky** v_c **:** $\begin{matrix} x = 5+t \\ y = 5+2t, t \in \langle -4;0 \rangle \end{matrix}$

Př. 6: Napiš pomocí parametru všechny přímky, které procházejí bodem $B[-2;3]$ a s osou *x* svírají kladný úhel větší než $45°$.

Dosadíme bod $B[-2;3]$: $y-3 = k(x-[-2]) \qquad \Rightarrow \; y-3 = k(x+2)$, $k \in \langle 1;\infty)$

Př. 7: Urči všechny hodnoty parametru *m*, pro které jsou přímky $p: mx+6y-2my+3=0$ a $q: 2x+my+1=0$ a) navzájem kolmé b) rovnoběžné.

a) přímky jsou navzájem kolmé $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (m;6-2m)\cdot(2;m) = 2m+6m-2m^2 = 0$

$8m-2m^2 = 0 \qquad m(4-m)=0 \; \Rightarrow \; m_1 = 0,\; m_2 = 4$

b) přímky jsou navzájem rovnoběžné $\boldsymbol{n}_p = k\cdot\boldsymbol{n}_q \Rightarrow (m;6-2m) = k(2;m)$ $\quad \begin{matrix} m = 2k \\ 6-2m = km \end{matrix}$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $6-2\cdot 2k = k\cdot 2k \quad /:2$

$3-2k = k^2 \qquad k^2+2k-3=0 \qquad (k+3)(k-1)=0$

$k_1 = -3 \;\Rightarrow\; m_1 = 2k = 2\cdot(-3) = -6 \qquad k_2 = 1 \;\Rightarrow\; m_2 = 2k = 2\cdot 1 = 2$

Př. 8: Najdi přímku, která prochází bodem $A[2;3]$ a platí pro ní, že její průsečík s osou *x* je od počátku soustavy souřadnic dvakrát vzdálenější než průsečík s osou *y*.

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Průsečík s osou *x*: $P[p;0] \Rightarrow$ průsečík s osou *y*: $Q\left[0;\pm\frac{p}{2}\right]$

$q = \frac{p}{2} \qquad \frac{x}{p}+\frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p}+\frac{2y}{p} = 1 \qquad\qquad q = -\frac{p}{2} \qquad \frac{x}{p}-\frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p}-\frac{2y}{p} = 1$

$\frac{2}{p}+\frac{2\cdot 3}{p} = 1 \quad /\cdot p \qquad 2+6 = p \qquad\qquad \frac{2}{p}-\frac{2\cdot 3}{p} = 1 \quad /\cdot p \qquad 2-6 = p$

$p = 8 \qquad \frac{x}{8}+\frac{y}{4} = 1 \; P[8;0],\; Q[0;4] \qquad\qquad p = -4 \qquad -\frac{x}{4}+\frac{y}{2} = 1 \quad P[-4;0],\; Q[0;2]$

Př. 9: Jsou dány dvě přímky: jedna je zadána obecnou rovnicí, druhá parametricky. Rozhodni co nejrychleji, bez určení průsečíků, zda jsou rovnoběžné (případně totožné) nebo různoběžné. Navržený postup ověř na přímkách z příkladu 2.

skalární součin normálového vektoru a směrového vektoru druhé přímky musí být nulový.
$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{u}_q = (2;-3)\cdot(-6;-4) = 2\cdot(-6)+(-3)\cdot(-4) = 0 \;\Rightarrow$ jsou rovnoběžné nebo totožné.