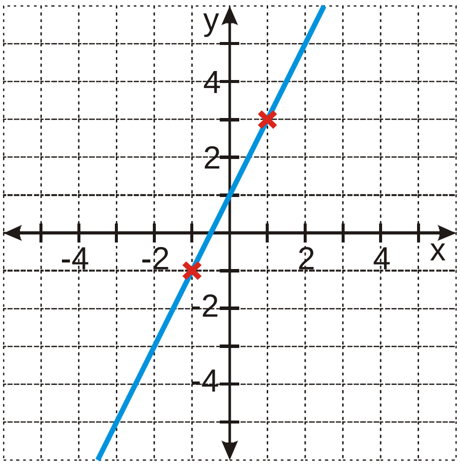
7.3.5 Obecná rovnice přímky

Př. 1: Jsou dány body $A[-1;-1]$ a $B[1;3]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Nakresli přímku *AB* do kartézské soustavy souřadnic a najdi její další vyjádření.

Směrový vektor $B-A=(2;4)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(1;2)$ Parametrické vyjádření: $x=-1+t$, $y=-1+2t, t\in R$

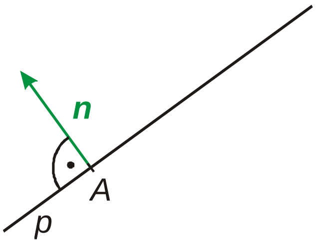


Přímka je také grafem lineární funkce $y=ax+b$.
Spočítáme koeficienty:
bod $[-1;-1]$ $\Rightarrow$ $-1=a(-1)+b$
bod $[1;3]$ $\Rightarrow$ $3=a\cdot 1+b$

$-1=-a+b$
$3=a+b$ odečteme rovnice

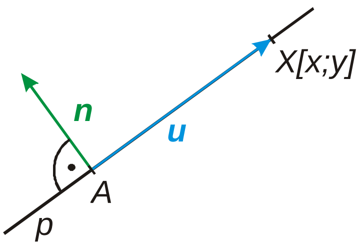
$3-(-1)=a-(-a)+b-b$
$2a=4 \Rightarrow a=2$
dosadíme do druhé rovnice:
$3=a+b=2+b\Rightarrow b=1$
Jde o funkci $y=2x+1$ $\Rightarrow$ rovnice $2x-y+1=0$ je také rovnicí přímky *AB*.

Zdá se, že rovnice $2x-y+1=0$ je novým typem rovnice přímky *AB*. Parametrické vyjádření popisuje přímku *AB* $\Rightarrow$ mělo by „obsahovat i rovnici $2x-y+1=0$. Jak získat rovnici $2x-y+1=0$ z parametrického vyjádření?
Neobsahuje parametr $\Rightarrow$ zkusíme se ho zbavit a ze dvou rovnic udělat jednu
$x=-1+t\Rightarrow t=x+1$ $y=-1+2t=-1+2(x+1)$ $y=2x+1$



přímku určuje bod a vektor, který je na přímku kolmý (**normálový vektor *n***)

Jaký je normálový vektor přímky *AB*? směrový vektor $\boldsymbol{u}=(1;2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(2;-1)$



Jak poznáme, že bod $X[x;y]$ leží na přímce *AB*?
Vektor $X-A$ je kolmý na normálový vektor $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový

konkrétní příklad: $A[-1;-1]$, $\boldsymbol{n}=(2;-1)$
$X-A=(x+1;y+1)$, $\boldsymbol{n}=(2;-1)$
$(x+1;y+1)(2;-1)=2x+2-y-1=0$
$2x-y+1=0$
teď už víme, kde se rovnice vzala

obecný postup: $P[p_1;p_2]$, $\boldsymbol{n}=(a;b)$
$X-A=(x-p_1;y-p_2)$, $\boldsymbol{n}=(a;b)$
$(x-p_1;y-p_2)(a;b)=ax-ap_1+by-bp_2=0$
$ax+by-ap_1-bp_2=ax+by+c=0$
$ax+by+c=0$ **- obecná rovnice přímky**

Ke každé přímce *p* lze najít taková čísla *a*, *b*, *c*, aby $X[x;y] \in p$ právě když $ax+by+c=0$.
Pro každou trojici reálných čísel *a*, *b*, *c*, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b* je nenulové, je množina všech bodu $X[x;y]$ pro které platí $ax+by+c=0$ přímka.

Rovnice $ax+by+c=0$, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b* je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky. Čísla *a*, *b* jsou souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n}=(a;b)$ této přímky, číslo *c* získáme dosazením libovolného bodu přímky do rovnice.

Př. 2: Urči obecnou rovnici přímky *CD*, $C[2;2]$, $D[-1;3]$.

Směrový vektor: $\boldsymbol{u}=D-C=(-3;1)$ Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(1;3)$
Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=1\cdot x+3y+c=0$.
Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *C*: $1\cdot 2+3\cdot 2+c=0 \Rightarrow c=-8$
Obecná rovnice přímky: $x+3y-8=0$.

Obecná rovnice přímky je první ukázkou nejčastějšího typu rovnice v analytické geometrii. Rovnice $ax+by+c=0$ obsahuje pět písmen, které můžeme rozdělit do dvou skupin:

- a,b,c jsou koeficienty, které odlišují různé přímky od sebe. Pro konkrétní přímku jsou nahrazeny čísly
- x,y jsou „prázdná místa“ rovnice, do kterých dosazujeme souřadnice bodů, o kterých chceme zjistit, zda leží na přímce nebo ne

Př. 3: Rozhodni, zda na přímce *CD* z předchozího příkladu leží body $E[1;2]$ a $F[5;1]$.

bod $E[1;2]$: $x+3y-8=1+3\cdot 2-8=-1\neq 0$ rovnice nevyšla $\Rightarrow$ bod *E* neleží na přímce *CD*
bod $F[5;1]$: $x+3y-8=5+3\cdot 1-8=0$ rovnice vyšla $\Rightarrow$ bod *F* leží na přímce *CD*

Př. 4: Urči obecnou rovnici přímky EF, $E[-2;1]$, $F[2;3]$.

Směrový vektor: $F-E=(4;2)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;1)$ Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(1;-2)$
Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=1\cdot x-2y+c=0$.
Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *E*: $1\cdot(-2)-2\cdot 1+c=0 \Rightarrow c=4$
Obecná rovnice přímky: $x-2y+4=0$.
Pro jednu přímku vyšly různé obecné rovnice:
$x-2y+4=0$ $-x+2y-4=0$ $2x-4y+8=0$ $-2x+4y-8=0$
$\Rightarrow$ pro jednu přímku existuje více obecných rovnic

- Rovnice jsou navzájem svými násobky.

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči obecné rovnice přímek, na kterých leží: a) strana *AB* b) výška v_c c) osa strany *AB* d) těžnice t_a e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

a) strana *AB*: $2x+3y-5=0$ **b) výška v_c:** $3x-2y+4=0$
c) osa strany *AB*: $3x-2y-1=0$ **d) těžnice t_a:** $x-5y+17=0$
e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$: $3x+y-4=0$