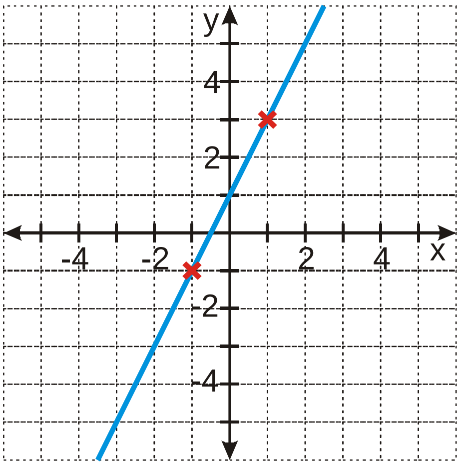
7.3.5 Obecná rovnice přímky

Předpoklady: 7303

Př. 1: Jsou dány body $A[-1;-1]$ a $B[1;3]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Nakresli přímku *AB* do kartézské soustavy souřadnic a najdi její další vyjádření.

Směrový vektor $B-A=(2;4)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(1;2)$

Parametrické vyjádření: $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=-1+2t, t\in R \end{array}$



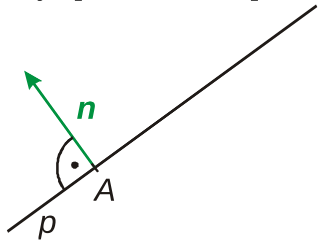
Přímka je také grafem lineární funkce $y=ax+b$.
Spočítáme koeficienty:
bod $[-1;-1]$ $\Rightarrow$ $-1=a(-1)+b$
bod $[1;3]$ $\Rightarrow$ $3=a\cdot 1+b$

$$\begin{array}{l} -1=-a+b \\ \underline{3=a+b} \end{array} \quad \text{odečteme rovnice}$$

$3-(-1)=a-(-a)+b-b$
$2a=4 \Rightarrow a=2$
dosadíme do druhé rovnice:
$3=a+b=2+b\Rightarrow b=1$
Jde o funkci $y=2x+1$ $\Rightarrow$ rovnice $2x-y+1=0$ je také rovnicí přímky *AB*.

Zdá se, že rovnice $2x-y+1=0$ je novým typem rovnice přímky *AB*. Parametrické vyjádření popisuje přímku *AB* $\Rightarrow$ mělo by „obsahovat i rovnici $2x-y+1=0$. Jak získat rovnici $2x-y+1=0$ z parametrického vyjádření?
Neobsahuje parametr $\Rightarrow$ zkusíme se ho zbavit a ze dvou rovnic udělat jednu
$x=-1+t\Rightarrow t=x+1$
$y=-1+2t=-1+2(x+1)$
$y=-1+2x+2$
$y=2x+1$
$2x-y+1=0$ opravdu je to stejná rovnice. Jaký je její význam?

Jiný způsob zadání přímky v rovině:

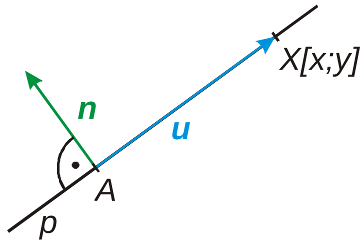


přímku určuje bod a vektor, který je na přímku kolmý (**normálový vektor *n***)

Jaký je normálový vektor přímky *AB*?

směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1;2) \Rightarrow$ normálový vektor $\boldsymbol{n} = (2;-1)$

Jak poznáme, že bod $X[x;y]$ leží na přímce *AB*?



Vektor $X - A$ je kolmý na normálový vektor $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový

Zapíšeme předchozí podmínku rovnicí:

konkrétní příklad:

$A[-1;-1]$, $\boldsymbol{n} = (2;-1)$

$X - A = (x+1; y+1)$, $\boldsymbol{n} = (2;-1)$

$(X - A)\boldsymbol{n} = 0$

$(x+1; y+1)(2;-1) = 2x + 2 - y - 1 = 0$

$2x - y + 1 = 0$

teď už víme, kde se rovnice vzala

obecný postup:

$P[p_1; p_2]$, $\boldsymbol{n} = (a;b)$

$X - A = (x - p_1; y - p_2)$, $\boldsymbol{n} = (a;b)$

$(X - A)\boldsymbol{n} = 0$

$(x - p_1; y - p_2)(a;b) = ax - ap_1 + by - bp_2 = 0$

$ax + by - ap_1 - bp_2 = ax + by + c = 0$

$ax + by + c = 0$ **- obecná rovnice přímky**

- Ke každé přímce *p* lze najít taková čísla *a*, *b*, *c*, aby $X[x;y] \in p$ právě když $ax + by + c = 0$.
- platí i obráceně:
  Pro každou trojici reálných čísel *a*, *b*, *c*, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b* je nenulové, je množina všech bodu $X[x;y]$ pro které platí $ax + by + c = 0$ přímka.

Rovnice $ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel *a*, *b* je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky. Čísla *a*, *b* jsou souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (a;b)$ této přímky, číslo *c* získáme dosazením libovolného bodu přímky do rovnice.

Př. 2: Urči obecnou rovnici přímky *CD*, $C[2;2]$, $D[-1;3]$.

Směrový vektor: $\boldsymbol{u} = D - C = (-3;1)$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (1;3)$

Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 1 \cdot x + 3y + c = 0$.

Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *C*: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -8$

Obecná rovnice přímky: $x+3y-8=0$.
Co když bychom dosadili bod *D*?
Zkusíme: $1\cdot(-1)+3\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=-8$ - stejný výsledek

Pedagogická poznámka: Pokud se někdo ptá, jestli záleží, který z bodů do rovnice dosadí, říkám, že si to má vyzkoušet.

Obecná rovnice přímky je první ukázkou nejčastějšího typu rovnice v analytické geometrii. Rovnice $ax+by+c=0$ obsahuje pět písmen, které můžeme rozdělit do dvou skupin:

- a,b,c jsou koeficienty, které odlišují různé přímky od sebe. Pro konkrétní přímku jsou nahrazeny čísly
- x,y jsou „prázdná místa“ rovnice, do kterých dosazujeme souřadnice bodů, o kterých chceme zjistit, zda leží na přímce nebo ne

Př. 3: Rozhodni, zda na přímce *CD* z předchozího příkladu leží body $E[1;2]$ a $F[5;1]$.

Dosazením body do rovnice přímky:
bod $E[1;2]$: $x+3y-8=1+3\cdot 2-8=-1\neq 0$ rovnice nevyšla $\Rightarrow$ bod *E* neleží na přímce *CD*
bod $F[5;1]$: $x+3y-8=5+3\cdot 1-8=0$ rovnice vyšla $\Rightarrow$ bod *F* leží na přímce *CD*

Pedagogická poznámka: I když se snažím, aby všichni studenti sestavili svoji první obecnou rovnici přímky sami podle návodu v rámečku, najde se pár, kteří potřebují něco ukázat. Proto následuje druhý příklad, který musí už všichni udělat samostatně. Jeho výsledky pak dále využijeme. Rychlejší studenti mohou ihned přejít na příklad 4 s tím, že si pod příkladem 3 vynechají několik řádek.

Př. 4: Urči obecnou rovnici přímky KL, $K[-2;1]$, $L[2;3]$.

Směrový vektor: $L-K=(4;2)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;1)$
Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(1;-2)$
Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=1\cdot x-2y+c=0$.
Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *K*: $1\cdot(-2)-2\cdot 1+c=0\Rightarrow c=4$
Obecná rovnice přímky: $x-2y+4=0$.

Co kdybychom nezkrátili směrový vektor?
Zkusíme: Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(2;-4)$
Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=2\cdot x-4y+c=0$.
Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *E*: $2\cdot(-2)-4\cdot 1+c=0\Rightarrow c=8$
Obecná rovnice přímky: $2x-4y+8=0$.

Pedagogická poznámka: Při hodině jsme získali všechny čtyři očekávatelné výsledky, kromě uvedených výše i jejich varianty vynásobené –1.

Pro jednu přímku vyšly různé obecné rovnice:

- $x-2y+4=0$
- $-x+2y-4=0$
- $2x-4y+8=0$
- $-2x+4y-8=0$

$\Rightarrow$ pro jednu přímku existuje více obecných rovnic
Je mezi nimi nějaký vztah?

- Rovnice jsou navzájem svými násobky.

Je to jasné, když rovnici vynásobíme nenulovým číslem, množina řešení se nezmění.

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči obecné rovnice přímek, na kterých leží: a) strana AB b) výška v_c c) osa strany AB d) těžnice t_a e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

a) strana *AB*

- normálový vektor: $\boldsymbol{AB}=B-A=(6;-4)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(2;3) \;\Rightarrow\; 2x+3y+c=0$
- dosadíme bod $A[-2;3]$: $2(-2)+3\cdot 3+c=0 \;\Rightarrow\; c=-5$

$\Rightarrow$ obecná rovnice přímky AB: $2x+3y-5=0$

b) výška v_c

- normálový vektor je shodný se směrovým vektorem přímky AB: $\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;-2) \;\Rightarrow$ $3x-2y+c=0$
- dosadíme bod $C[2;5]$: $3\cdot 2-2\cdot 5+c=0 \;\Rightarrow\; c=4$

$\Rightarrow$ obecná rovnice přímky na které leží výška v_c: $3x-2y+4=0$

c) osa strany *AB*

- normálový vektor je shodný se směrovým vektorem přímky AB: $\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;-2) \;\Rightarrow$ $3x-2y+c=0$
- dosadíme bod $S_{AB}[1;1]$: $3\cdot 1-2\cdot 1+c=0 \;\Rightarrow\; c=-1$

$\Rightarrow$ obecná rovnice osy strany AB: $3x-2y-1=0$

d) těžnice t_a

přímka určená body $A[-2;3]$, $S_{BC}[3;2]$

- normálový vektor: $\boldsymbol{AS}_{BC}=S_{BC}-A=(5;1)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;-5) \;\Rightarrow\; x-5y+c=0$
- dosadíme bod $A[-2;3]$: $(-2)-5\cdot 3+c=0 \;\Rightarrow\; c=17$

$\Rightarrow$ obecná rovnice přímky, na které leží těžnice t_c: $x-5y+17=0$

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

přímka určená body $S_{AB}[1;1]$, $S_{AC}[0;4]$

- normálový vektor: $\boldsymbol{S}_{AB}\boldsymbol{S}_{AC}=S_{AC}-S_{AB}=(-1;3)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;1) \;\Rightarrow\; 3x+y+c=0$
- dosadíme bod $S_{AB}[1;1]$: $3\cdot 1+1+c=0 \;\Rightarrow\; c=-4$

$\Rightarrow$ obecná rovnice přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$: $3x+y-4=0$

Př. 6: Petáková:
strana 105/cvičení 1 a) c) d) e) (pouze obecné rovnice)

Shrnutí: Rovnice $ax+by+c=0$ s alespoň jedním nenulovým číslem *a*, *b* popisuje přímku v rovině. Koeficienty *a*, *b* se rovnají složkám normálového vektoru $\boldsymbol{n}=(a;b)$.