7.3.3 Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek II

Př. 1: Urči vzájemnou polohu přímek *AB* a *CD*. $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[7;2]$, $D[-1;4]$. Pokud jsou přímky různoběžné najdi jejich průsečík.

přímka *AB*: $B-A=(6;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(3;-2)$ přímka *CD*: $D-C=(-8;2) \Rightarrow \boldsymbol{v}=(-4;1)$

neplatí $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u} \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné $\Rightarrow$ hledáme průsečík

přímka *AB*: $\begin{aligned} x&=-2+3t \\ y&=3-2t, t\in R \end{aligned}$ přímka *CD*: $\begin{aligned} x&=7-4s \\ y&=2+s, s\in R \end{aligned}$

$-2+3t=7-4s$ $\quad$ $3t+4s=9$

$3-2t=2+s$ $\quad$ $-2t-s=-1 \Rightarrow s=1-2t$

$3t+4s=3t+4(1-2t)=9$

$-5t=5 \Rightarrow t=-1$

Určíme průsečík: $\begin{aligned} x&=-2+3t=-2+3(-1)=-5 \\ y&=3-2t=3-2(-1)=5 \end{aligned}$ Protínají se v bodě $P[-5;5]$.

Př. 2: Urči průsečíky přímek *p*: $\begin{aligned} x&=1-2t \\ y&=3+t, t\in R \end{aligned}$ a *q*: $\begin{aligned} x&=2+4s \\ y&=2-2s, s\in R \end{aligned}$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha.

Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek:

$1-2t=2+4s$ $\quad$ $-2t-4s=1$

$3+t=2-2s$ $\quad$ $t+2s=-1 \Rightarrow t=-1-2s$

Dosazení: $-2t-4s=-(-1-2s)-4s=1$

$2+4s-4s=1$ $\quad$ $2=1 \Rightarrow$ přímky nemají žádný průsečík $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné

Př. 3: Rozhodni které z následujících přímek jsou totožné:

a) $p(A,\boldsymbol{u})$, $A[4;1]$, $\boldsymbol{u}=(-2;2)$ $\quad$ b) *q*: $\begin{aligned} x&=4+2t \\ y&=1+t, t\in R \end{aligned}$

c) $r=\{[1-4t;4-2t], t\in R\}$ $\quad$ d) CD, $C[-2;-2]$, $D[6;2]$

p: $\boldsymbol{u}_p=(-2;2)$ $\quad$ *q*: $\boldsymbol{u}_q=(2;1)$ $\quad$ *r*: $\boldsymbol{u}_r=(-4;-2)$ $\quad$ *CD*: $\boldsymbol{u}_{CD}=D-C=(8;4)$

Z přehledu směrových vektorů je vidět, že navzájem jsou svými násobky vektory $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{CD}$ (platí: $\boldsymbol{u}_r=-2\boldsymbol{u}_q$, $\boldsymbol{u}_{CD}=4\boldsymbol{u}_q$) $\Rightarrow$ přímky *q*, *r* a *CD* mohou být totožné.

Zjistíme, zda počáteční body přímek *r* a *CD* leží na přímce *q*.

***r*:** počáteční bod přímky *r* $R[1;4]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*:

$1=4+2t \Rightarrow 2t=-3 \Rightarrow t=-\frac{3}{2}$

$4=1+t \Rightarrow t=3$ $\quad$ bod *R* na přímce *q* neleží $\Rightarrow$ přímka *r* není totožná s přímkou *q*

***CD*:** bod přímky *CD*: $C[-2;-2]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*:

$-2=4+2t \Rightarrow 2t=-6 \Rightarrow t=-3$

$-2=1+t \Rightarrow t=-3$ $\quad$ bod *C* na přímce *q* leží $\Rightarrow$ přímka *CD* je totožná s přímkou *q*

Ze čtyř zadaných přímek jsou totožné přímky *q* a *CD*.

Př. 4: Rozhodni, jak by vypadalo řešení předchozího příkladu v případě, že bychom během postupu použitého v řešení zjistili, že přímka *r* ani přímka *CD* nejsou totožné s přímkou *q*.

Pokud bychom zjistili, že ani jedna z přímek *r* a *CD* není totožná s přímkou *q*, museli bychom otestovat zda nejsou totožné přímky *r* a *CD*. Podle výsledku tohoto bychom rozhodli o konečném výsledku (žádné dvě přímky nejsou totožné nebo přímky *r* a *CD* jsou totožné). Při řešení předchozího příkladu takové testování nemusíme provádět. Přímka *r* není totožná s přímkou *q*, se kterou je totožná přímka *CD* a proto nemohou být totožné ani přímky *r* a *CD*.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je synchronizační. Rychlejší části třídy trvá už jenom to, že musí pochopit zadání, s pomalejšími se zadání probere jako součást předchozího příkladu. Při kontrole na tabuli doporučuji zakreslit přímku *q* a pak do obrázku postupně přidávat další přímky (podle výsledků testování). Studenti tak velice rychle pochopí, o co v příkladu jde.

Př. 5: Urči průsečíky přímek $p(A;\boldsymbol{u})$, $q(B;\boldsymbol{v})$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha. $A[-2;-1]$, $\boldsymbol{u}=(2;3)$, $B[2;5]$, $\boldsymbol{v}=(-4;-6)$.

přímka *p*: $\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-1+3t, t\in R \end{array}$ přímka *q*: $\begin{array}{l} x=2-4s \\ y=5-6s, s\in R \end{array}$

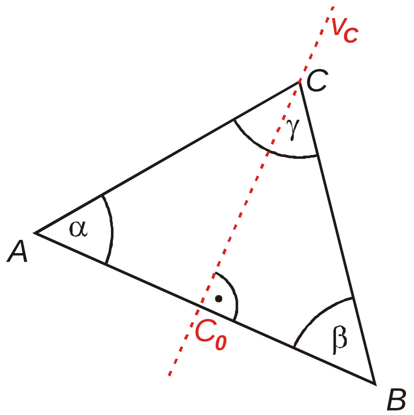
Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek:

$$\begin{array}{l} -2+2t=2-4s \\ -1+3t=5-6s \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2t+4s=4 \quad /:2 \\ 3t+6s=6 \quad /:3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t+2s=2 \\ t+2s=2 \\ \hline \end{array}$$

Rovnice odečteme: $0=0$ $\Rightarrow$ přímky *p*, *q* mají nekonečně mnoho společných bodů $\Rightarrow$ jsou totožné

Př. 6: Urči souřadnice paty výšky v_C v trojúhelníku *ABC*, $A[-2;-1]$, $B[6;-5]$, $C[3;4]$.



Přímka *AB*: $B-A=(8;-4)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;-1)$

$$\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-1-t, t\in R \end{array}$$

Přímka v_C: směrový vektor musí být kolmý na vektor přímky *AB* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}=(1;2)$ $\begin{array}{l} x=3+s \\ y=4+2s, s\in R \end{array}$

Hledáme průsečík:

$$\begin{array}{l} -2+2t=3+s \\ -1-t=4+2s \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2t-s=5 \Rightarrow s=2t-5 \\ -t-2s=5 \\ \hline \end{array}$$

$$-t-2s=-t-2(2t-5)=5$$

$$-t-4t+10=5$$

$$t=1$$

Vypočteme souřadnice průsečíku: $\begin{array}{l} x=-2+2t=-2+2\cdot 1=0 \\ y=-1-t=-1-1=-2 \end{array}$

Pata výšky v_C má souřadnice $C_0[0;-2]$.