

7.2.7 Skalární součin I

Předpoklady: 7204

Problém: Umíme násobit vektory číslem, ale neumíme je násobit mezi sebou.

Vzpomínka: Velikost vektoru $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Připomíná vzorce pro velikost (absolutní hodnoty) čísel:

- reálné číslo $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x}$
- komplexní číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

V obou případech jsme získali velikost jako odmocninu ze součinu (čísla se sebou samým nebo s číslem komplexně sdruženým) \Rightarrow zkusíme zavést násobení vektoru s vektorem tak, aby předchozí postřeh platil i pro vektory.

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2$$

Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$?

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

\Rightarrow **Velký rozdíl oproti násobení dvou čísel. Vynásobením dvou čísel získáme opět číslo, ale vynásobením dvou vektorů, získáváme číslo, tedy něco úplně jiného než, co jsme násobili.**

Ve fyzice se veličinám, které reprezentuje pouze číslo říká skaláry \Rightarrow tento způsob násobení vektorů, ze kterého vzniká číslo, se nazývá **skalární součin**.

Pedagogická poznámka: Je důležité, aby studenti měli rámcovou představu, co počítají. Tedy, že násobí mezi sebou dvojice (trojice) čísel, ale výsledkem je jediné číslo.

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Př. 1: Urči skalární součin vektorů $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

a) $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$ a $\mathbf{v} = (3; 3; 3)$

b) $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$ a $\mathbf{v} = (3; 3; -3)$

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; 3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 + 6 + 9 = 18$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; -3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) = 3 + 6 - 9 = 0$

Zajímavé: v bodu b) je součin dvou nenulových vektorů roven nule.

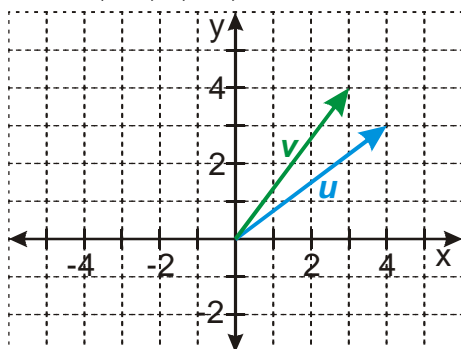
U čísel získáme nulu pouze, když se jedno z násobených čísel rovná nule \Rightarrow skalární součin zřejmě nezávisí pouze na velikosti vektorů jako součin čísel \Rightarrow prozkoumáme situaci v rovině, kde si můžeme vektory i snadno nakreslit

Př. 2: U každé z následujících dvojic vektorů vypočti skalární součin a načrtni obrázek. Pro všechny vektory vol umístění v počátku soustavy souřadnic.

- a) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (3;4)$ b) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (0;5)$ c) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (-3;4)$

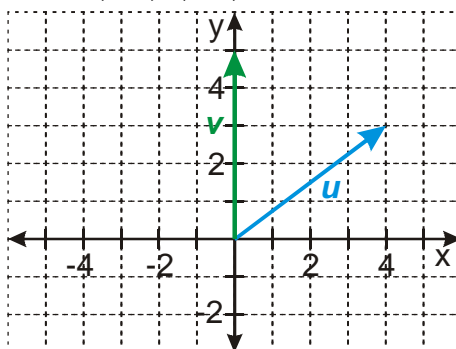
a) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (3;4)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4;3) \cdot (3;4) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$$



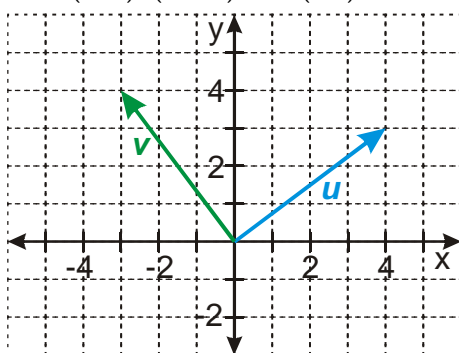
b) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (0;5)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4;3) \cdot (0;5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$



c) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (-3;4)$

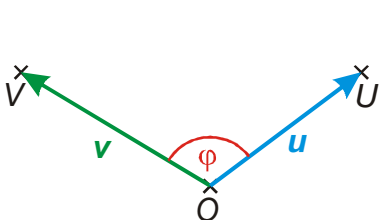
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4;3) \cdot (-3;4) = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$$



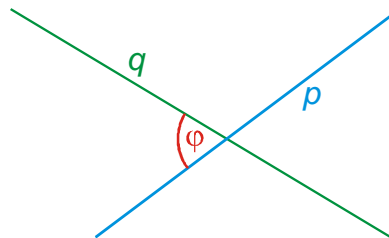
Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu nečekáme, až všichni studenti dodělají všechny tři body. Kontrolujeme ve chvíli, kdy je hotová přibližně polovina.

Všechny násobené vektory měly stejnou velikost, přesto se jejich skalární násobky liší. \Rightarrow Zřejmě skalární součin kromě velikosti vektorů závisí i na úhlu, který vektory svírají. O úhlu, který svírají vektory jsme ještě nemluvili. Co to vlastně je?

Př. 3: Úhel, který svírají dva vektory je zaveden takto: “Mají-li dva vektory u, v umístění OU, OV , nazývá se velikost konvexního úhlu UOV úhel φ vektorů u, v . Jsou-li přímky OU, OV navzájem kolmé, říkáme, že i vektory OU, OV jsou navzájem kolmé.”
Nakresli obrázek zachycující situaci popisovanou v definici. Jakých hodnot může dosáhnout úhel, který svírají dva vektory? Jakých hodnot může dosáhnout odchylka dvou přímek?



pro úhel φ dvou vektorů platí: $0 \leq \varphi \leq \pi$



pro odchylku α přímek platí: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

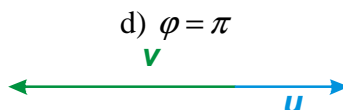
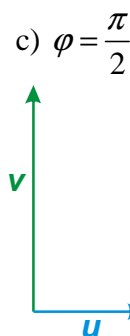
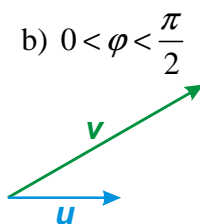
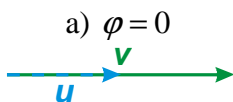
Př. 4: Jsou dány vektory u, v takové, že platí: $|v| = 2|u|$. Vyznač možnou polohu těchto vektorů pokud pro úhel φ , který svírají platí:

a) $\varphi = 0$

b) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

d) $\varphi = \pi$

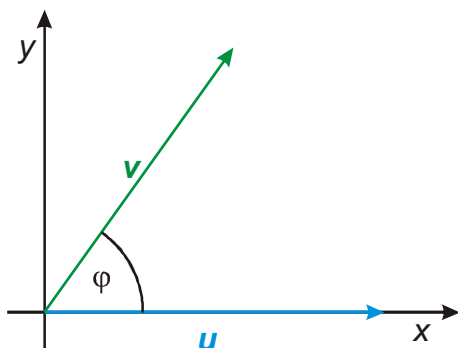


Ted' už si můžeme ukázat, co znamená skalární součin vektorů u, v .

Nápad: Umíme spočítat skalární součin ze souřadnic vektorů, chceme ho spočítat z velikostí vektorů a úhlu, který svírají \Rightarrow vyjádříme souřadnice vektorů pomocí velikostí vektorů a úhlu a z těchto souřadnic součin spočítáme.

Př. 5: Jsou dány dva vektory u (o velikosti $|u|$) a v (o velikosti $|v|$), které svírají úhel φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$). Urči souřadnice těchto vektorů v kartézské soustavě, jejíž osa x je rovnoběžná se směrem vektoru u .
Nakresli náčrtek situace, umístění obou vektorů vol tak, aby jejich počáteční body

ležely v počátku soustavy souřadnic. Pomocí velikostí obou vektorů $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ a velikosti úhlu φ vyjádří jejich souřadnice. Poté odvod' vzorec pro význam skalárního součinu.



$$\mathbf{u} = (|\mathbf{u}|; 0)$$

$$\mathbf{v} = (|\mathbf{v}| \cos \varphi; |\mathbf{v}| \sin \varphi)$$

Ted' můžeme vypočítat skalární součin:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (|\mathbf{u}|; 0) \cdot (|\mathbf{v}| \cos \varphi; |\mathbf{v}| \sin \varphi) = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi + 0 \cdot |\mathbf{v}| \sin \varphi$$

Pro skalární součin dvou vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} platí: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$

⇒ skalární součin závisí na velikosti vektorů a úhlu, který vektory svírají

Pedagogická poznámka: Studenti většinou nakreslí obrázek, ale určování souřadnic jim nejde. Souřadnice vektoru \mathbf{u} jim proto ukazují docela brzo.

Př. 6: Rozhodni, kdy je skalární součin vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} roven nule.

ze vzorce $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$ vyplývá, že skalární součin vektorů je nulový:

- pokud je jeden z vektorů nulový (má nulovou délku)
- pokud jsou na sebe vektory kolmé.

Př. 7: Petáková:
strana 101/cvičení 24

Shrnutí: Skalární součin vyjadřuje „množství společného směru“ dvou vektorů.